

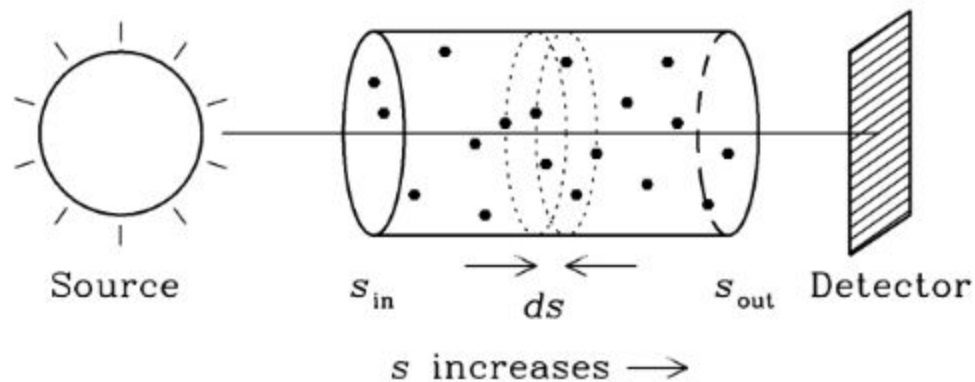
2.2 復習

free space (吸収、散乱、放出がない空間)において、放射強度は光線上で不変である

$$\frac{dI_\nu}{ds} = 0$$

I_ν : 放射強度、 s : 光線上に沿った座標

線源と観測者の間に物質があるとどうなる？



2.2.1 線吸収係数

微小厚さ d_s の領域で光子が吸収される確率 dP

$$dP = \kappa ds \quad \kappa \equiv \frac{dP}{ds}$$

κ 線吸収係数 (m^{-1})

$\kappa = 1 \text{ m}^{-1}$ 、 $\Delta s = 10^{-3} \text{ m}$ Δs のとき、 m^{-1}

吸収確率は $\kappa \Delta s = 1 \text{ m}^{-1} \times 10^{-3} \text{ m} = 10^{-3}$ (0.1%) 10^{-3}

微視的な物理過程に依存しない、巨視的な描像

2.2.1 強度比

ランベルト・ベールの法則:

$$I_1 = I_0 e^{-\kappa S}$$

距離 S の間に放射強度が I_0 から I_1 へ変化したときの両者の関係

微小距離 ds をとると、この関係から以下の二式が導ける(→ホワイトボード)

$$dP = \kappa ds$$

$$\frac{dI_\nu}{I_\nu} = -\kappa ds$$

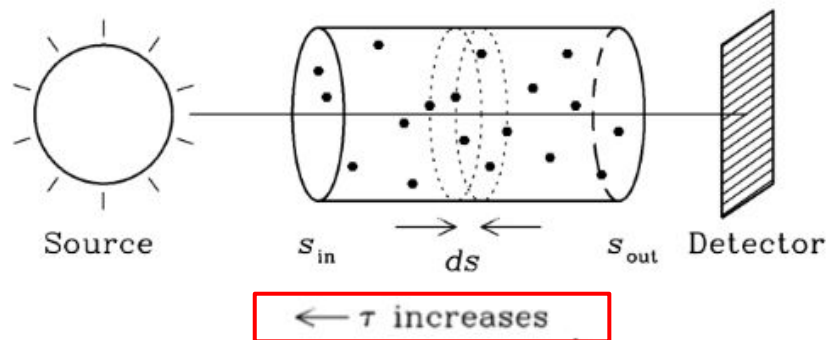
dP が無限小になるくらい層が薄い場合のみ、層内の吸収確率は厚さ ds とともに直線的に増加し、は ds に依存しない定数になる。(p.10)

2.2.1 光学的厚さ

(2.19)の両辺を積分して以下を得る

$$\frac{I_\nu(s_{\text{out}})}{I_\nu(s_{\text{in}})} = \exp\left(-\int_{s_{\text{in}}}^{s_{\text{out}}} \kappa(s') ds'\right) = \exp(-\tau)$$

$$\tau \equiv -\int_{s_{\text{out}}}^{s_{\text{in}}} \kappa(s') ds'$$



τ : 光学的厚さ(無次元)

s_{in} 、 s_{out} は任意なので、定義において微小の厚さをとると $d\tau = -\kappa ds$

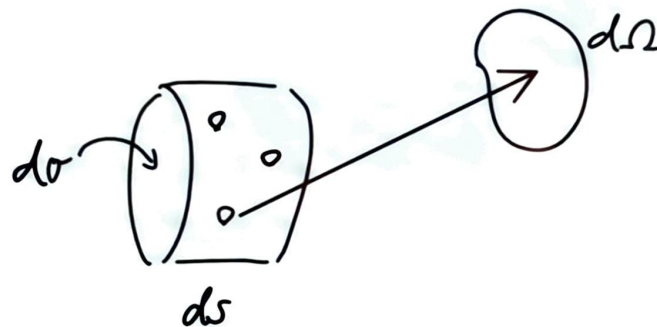
$\tau \ll 1$: 光学的に薄い、 $\tau \gg 1$: 光学的に厚い

2.2.2 放射率

中間物質(厚さ ds 断面積 $d\sigma$ から立体角

$d\Omega$ 光子が放射される確率:

$$\frac{dP_{\text{em}}}{dt} \propto ds d\sigma d\Omega$$



確率が増加 \rightarrow $d\Omega$ が受けるエネルギーが増加

$$\frac{dE}{dt d\nu} = j_\nu ds d\sigma d\Omega \quad j_\nu \equiv \frac{dI_\nu}{ds} \quad (\rightarrow \text{ホワイトボード})$$

j_ν : 放射率 ($\text{W m}^{-3} \text{ Hz}^{-1} \text{ sr}^{-1}$)

2.2.2 放射伝達方程式

吸収と放射の両方の効果があるとき、放射伝達方程式が得られる

$$\frac{dI_\nu}{ds} = -\kappa I_\nu + j_\nu \quad (\rightarrow \text{ホワイトボード})$$

熱力学平衡(TE)の元では、吸収と放射は独立には起こらない

(κ と j_ν は独立ではない)

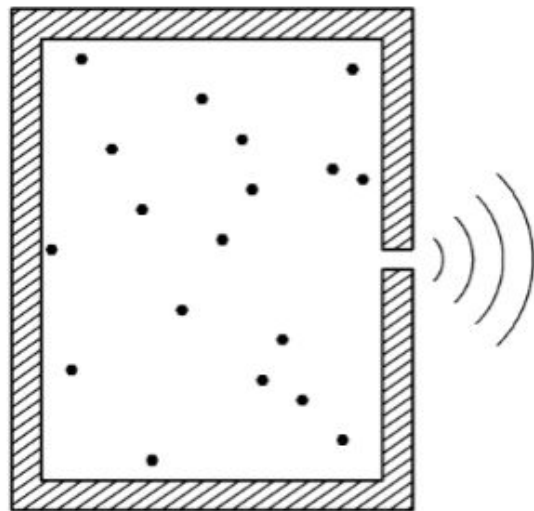
2.2.2 空洞放射

電磁波を完全に遮断する壁で囲まれた容器に小さな孔を開ける

- ・容器内の物質と電磁波はある温度で平衡状態にある
- ・孔は微小なので平衡状態の乱れを無視できる

→ 孔からは熱などの温度に応じた電磁波が放射される(空洞放射)

空洞放射は内壁の素材や内部物質によらない



2.2.2 キルヒホッフの思考実験

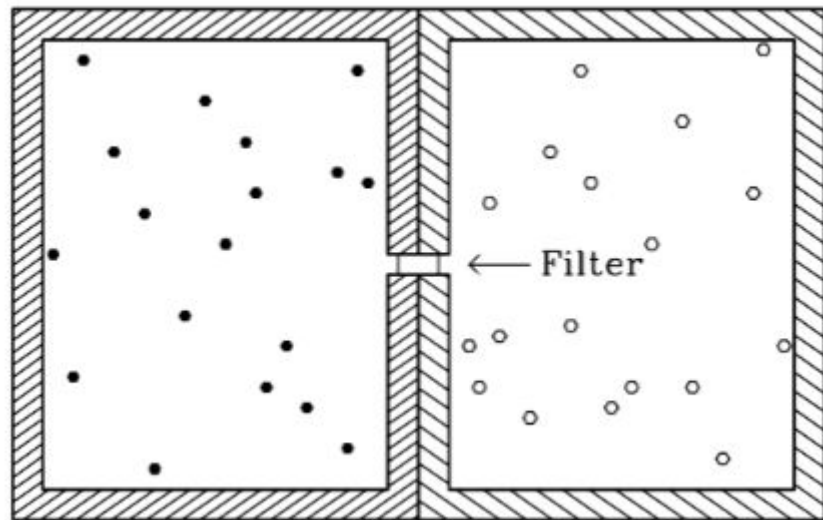
異なる物質で満たされた、異なる材質の容器をフィルターで連結する

- ・容器は温度 T でTE
- ・フィルターは微小波長域 $d\nu$ の電磁波を通し、仕事をしない
(平衡が乱れない)

容器内で $d\nu$ の強度が異なるとすると、
同じになるよう電磁波のやり取りがある

- 容器間で温度が変わる可能性がある
(熱力学第二法則に矛盾)

TEでの強度スペクトル分布は温度にのみ
依存していなければならない



2.2.2 キルヒホッフの法則

位置依存性がないから、

$$\frac{dI_\nu}{ds} = -\kappa I_\nu + j_\nu = 0$$

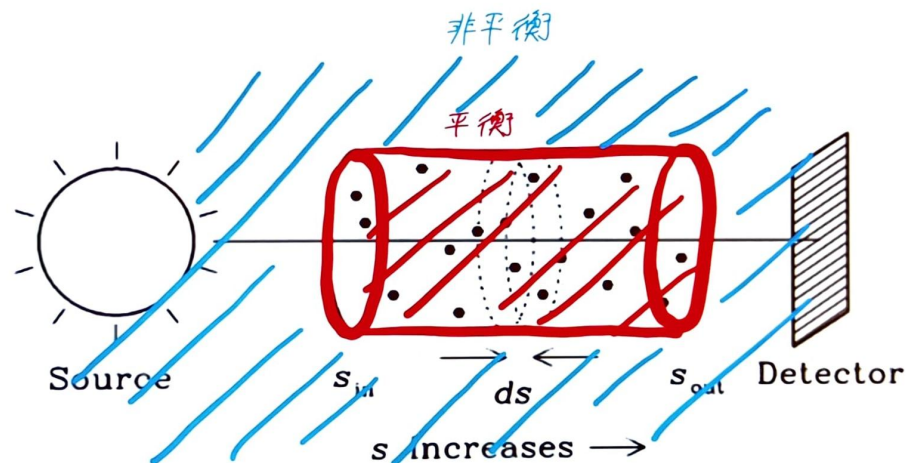
$I_\nu = B_\nu(T)$ とすれば、任意の周波数について

$$\frac{j_\nu(T)}{\kappa(T)} = B_\nu(T) : \text{キルヒホッフの法則}$$

- ・容器の材質や内部の物質によらず成り立つ
- ・容器の形状によらず成り立つ(空洞放射は等方的でなければならない)

2.2.2 局所熱力学平衡 (LTE)

局所熱力学平衡 (LTE): 中間物質が有意な温度で熱平衡にある場合



- ・ $B_\nu(T)$: 中間物質の性質によらない
 - ・ $\kappa(T) \quad j_\nu(T)$ 周囲の放射場やスペクトルによらない
- キルヒホッフの法則はLTEでも成り立つ

2.2.2 黒体放射スペクトル

黒体: 入射する電磁波を全波長にわたって吸収できる物体

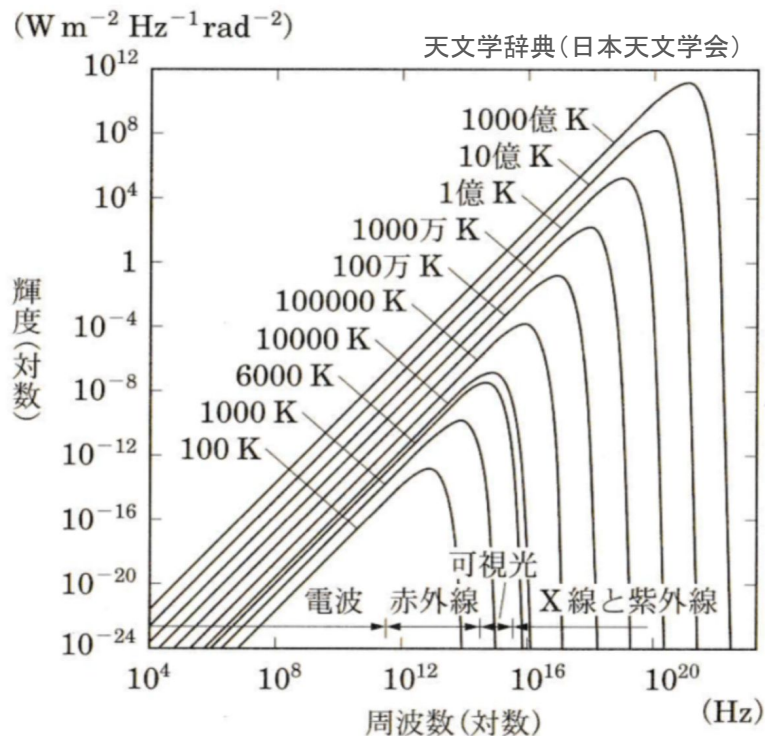
空洞放射を放出する容器は黒体とみなせるから、空洞放射は黒体放射と同じ

黒体放射スペクトル:

$$B_\nu(\nu, T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1}$$

- ・高周波数or低温では指数関数的に減少
- ・低周波数or高温ではべき乗に従って増加

実生活下では極めて小さいが、
電磁波長では大きいため重要



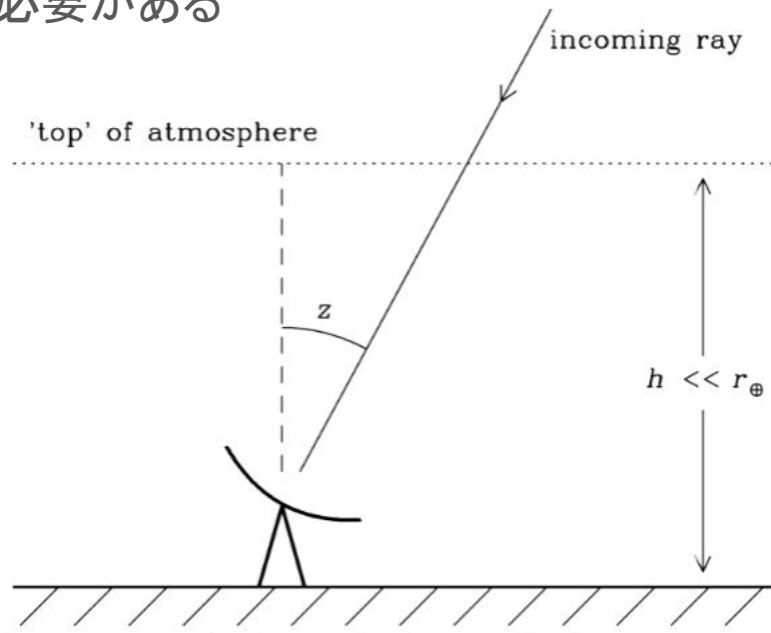
2.2.3 地球大気における放射と吸収

地球大気では

- ・吸収は測定の正確性に影響を与える
- ・放射はノイズを増大させる

→ データ較正のため吸収量と放射量を求める必要がある

1. 大気からの放射強度を天頂角 z の関数として測定
2. 放射強度を輝度温度に変換
3. キルヒホッフの法則を用いて、実際の温度と輝度温度から光学的厚さを決定
4. 光学的厚さから吸収量と放射量を決定



2.2.3 放射強度測定

- ・大気信号は他のノイズ(受信機自体で発生するノイズなど)と区別できない
受信機出力電圧はこれらノイズの和に比例する
- I_ν は天頂角に対する変化のみ知ることができる
(絶対値を知ることはできない)
- ・ほとんどの測定はなんらかの較正ソースとの相対関係をもとに行われる
(異なる既知の温度を持つ二つの吸収板を交互に見るなど)

2.2.3 輝度温度

黒体放射に対して低周波数領域で成り立つレイリー・ジーンズの近似式:

$$B_\nu \sim \frac{2kT\nu^2}{c^2}$$

これを $B_\nu \neq I_\nu$ も適用:

$$I_\nu = \frac{2kT_b\nu^2}{c^2} \quad T_b(\nu) \equiv \frac{I_\nu c^2}{2k\nu^2}$$

T_b : 輝度温度 (K)、放射強度の温度換算による表現

較正された電波望遠鏡の温度と異なり、電波源の温度を反映している

2.2.3 実際の温度と輝度温度

輝度温度は実際の温度とは異なる

- ・非熱的電波源は周波数に依存する輝度温度を持つが、有意な温度は持たない
- ・熱的電波源の輝度温度は実際の温度より低い

$h\nu \ll kT$ の場合のみ、黒体において輝度温度は実際の温度に等しくなる

熱的電波源: 熱エネルギーが起源の電波を発する電波源

原子、分子スペクトルなど

非熱的電波源: 高エネルギー粒子エネルギーが起源の電波を発する電波源

超新星残骸、ジェット、パルサーなど

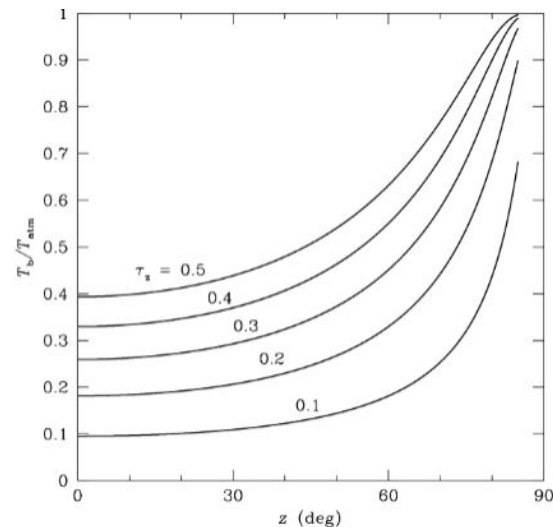
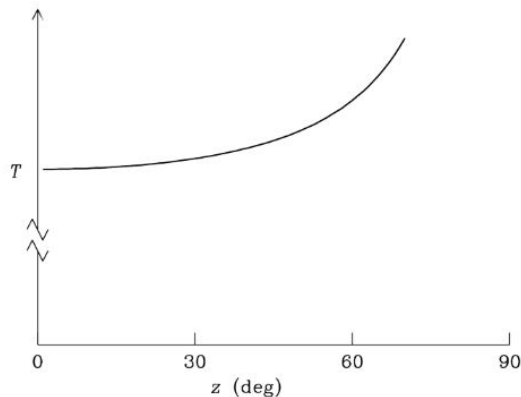
2.2.3 大気の光学的厚さの決定

大気の放射による輝度温度:

$$T_b = \left(1 - \exp(-\tau_z \sec z) \right) T_{\text{atm}}$$

τ_z : 天頂での光学的厚さ、 T_{atm} (→ 大気温度)

観測で得られた温度(左図)を
右図のカーブにフィッティング
することで、光学的厚さを
求めることができる



2.2.3 システム雑音温度

- ・ $\tau_z \ll 1$
- ・ $\nu > 1 \text{ GHz}$
- ・ 地面からの放射もれが少ない

→ システム雑音温度:

$$T_s \sim (T_r + T_{\text{cmb}}) + T_{\text{atm}} \tau_z \sec z$$

T_r : 受信機雑音、

$T_{\text{cmb}} \sim 2.7 \text{ K}$: 宇宙マイクロ波背景放射による輝度温度

(→ホワイトボード)

括弧内は天頂角に対し独立であり、大気温度も容易に測れるので、システム雑音温度も容易に求められる量

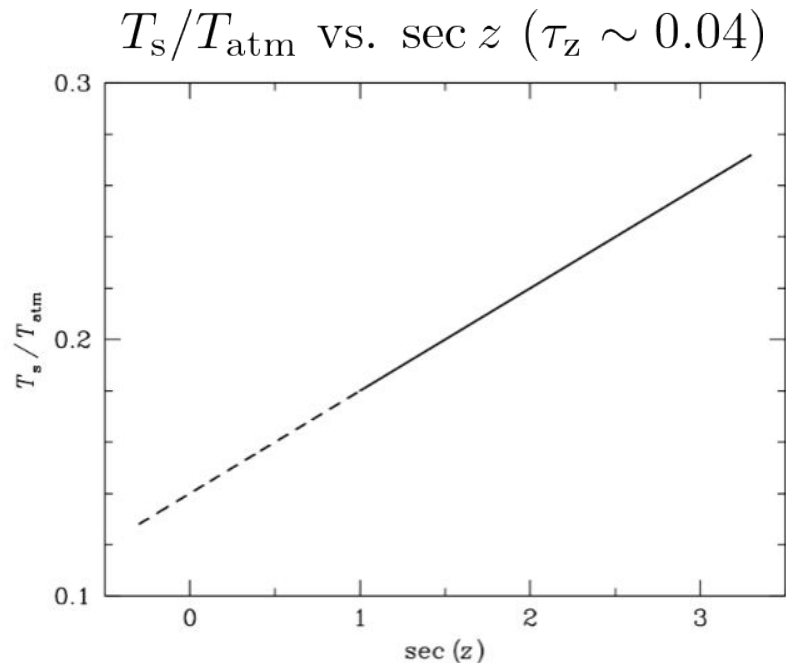
2.2.3 T_s/T_{atm} vs. $\text{sec } z$

$$\frac{T_s}{T_{\text{atm}}} = \tau_z \text{sec } z + \frac{T_r + T_{\text{cmb}}}{T_{\text{atm}}}$$

T_s/T_{atm} vs. $\text{sec } z$ のグラフを用いて、
受信機雑音やCMBによる輝度温度を求められる

e.g. 光学的厚さ0.04、大気温度280 Kのとき、
受信機雑音は36.5 K

e.g. 4 GHzでのCMBによる輝度温度は3 K



2.2.4 不透明物質

不透明物質: 光子が通り抜けることができない物質

不透明物質に対し周波数 ν の光子が入射したとき、

- ・吸収係数 $a(\nu)$: 光子が吸収される確率
- ・反射係数 $r(\nu)$: 光子が反射される確率

不透明物質では吸収か反射しか起こらないので $a(\nu) + r(\nu) = 1$

- ・放射係数 $e(\nu)$: 不透明物質のスペクトルパワー / 黒体のスペクトルパワー
(周波数、単位面積当たり、同温度)

2.2.4 不透明物質におけるキルヒホッフの法則

放射係数 $e(\nu)$: 不透明物質のスペクトルパワー / 黒体のスペクトルパワー
(周波数、単位面積当たり、同温度)

右のようなLTE下にある不透明物質において、

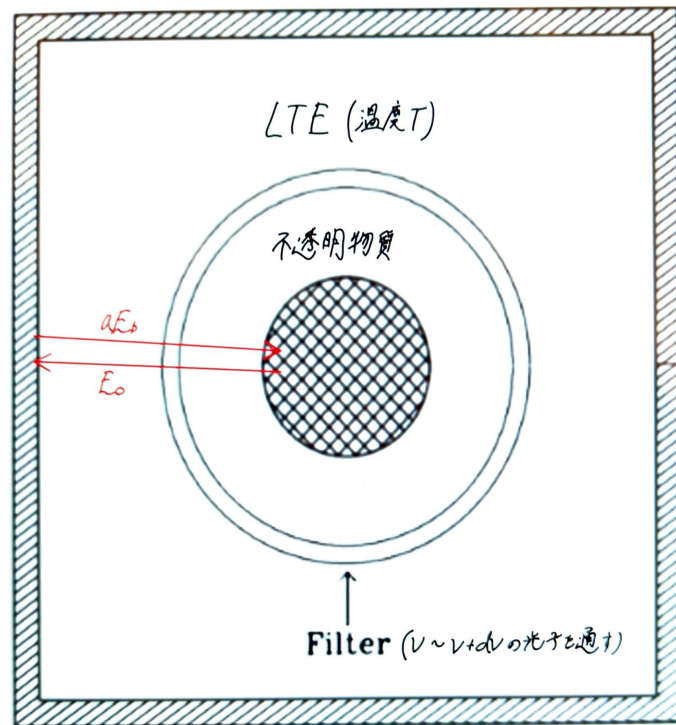
不透明物質の放射エネルギーを E_o 、
周囲の黒体の放射エネルギーを E_b とすると、

不透明体の吸収エネルギーは $a(\nu)E_b$

平衡状態では不透明物質の放射エネルギーと
吸収エネルギーは等しいから

$$a(\nu)E_b = E_o \Rightarrow a(\nu) = \frac{E_o}{E_b} = e(\nu)$$

: 不透明物質におけるキルヒホッフの法則



2.2.4 不透明物質の輝度温度

大気の放射による輝度温度において、 $(1 - \exp(\text{の部分}))$ が吸収確率を表す

同様に、温度 T でLTEにある不透明物質における輝度温度を考えると

$$T_b(\nu) = a(\nu)T = (1 - r(\nu))T$$

- ・熱的電波源の輝度温度と同様、 $T_b \leq T$
- ・ $T_b = 0$ (r ~~よ~~、~~反~~射率100%の物質は放射をしない)