

# 磁気流体力学の基礎

岩崎一成

国立天文台 天文シミュレーションプロジェクト

# 天文学で使われる単位系

物理では国際単位系である MKSA 単位系 (メートル, キログラム, 秒, アンペア) が使われるが, 天文学では **cgs-Gauss 単位系** が使われる (センチメートル, グラム, 秒)。

力学部分の方程式は, MKS から cgs になったとしても変わらないが, 電磁気の方程式は単位系によって式に現れる係数が変わってしまう。

真空の誘電率と透磁率を使った Maxwell 方程式は以下になる。

	MKSA 単位系	cgs-Gauss 単位系
Gauss の法則	$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_c}{\epsilon_0}$	$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho_c$
Gauss の法則	$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$
Ampère の法則	$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$	$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$
Faraday の法則	$\mu_0 \nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$	$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$

天文学で扱うガス流体は比透磁率が 1 なので, 磁束密度  $\mathbf{B}$  のことを単に磁場と呼ぶ。

# 支配方程式

## ■ 流体方程式

圧力勾配力だけでなく電磁場による力を受ける。

$$F = q_c E + \frac{1}{c} J \times B$$

大きなスケールでは、電氣的に中性  $q_c = 0$  と近似できる (準中性条件)。

$$F = \cancel{q_c E} + \frac{1}{c} J \times B$$

ある領域に電荷分布  $q_c$  に不均一があったとしても、生じる電場によって質量の軽い電子が動いて、デバイ長より離れると電場が 0 となる (遮蔽される)。

## ■ Maxwell 方程式

電磁場を記述する方程式 ( $\rho_c$ : 電荷密度,  $J$ : 電流密度)

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot E = 4\pi\rho_c, \quad \nabla \cdot B = 0 \quad (\text{Gauss の法則}) \\ \nabla \times E = -\frac{1}{c} \frac{\partial B}{\partial t} \quad (\text{Faraday の法則}) \\ \nabla \times B = \frac{4\pi}{c} J + \frac{1}{c} \frac{\partial E}{\partial t} \quad (\text{Ampère の法則}) \end{array} \right.$$

# Maxwell 方程式の近似

磁気流体では、非相対論的な流体の運動 ( $v \ll c$ ) ↔ 電磁場の相互作用を扱う。

## ■ Faraday の法則

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \longrightarrow \quad \frac{E}{L} \sim \frac{1}{c} \frac{B}{t} \quad \longrightarrow \quad E \sim \frac{L}{ct} B \sim \frac{v}{c} B$$

となり ( $v \sim L/t$ )、電場は磁場よりも極めて小さい (電磁波 ( $E \sim B$ ) とは異なる)

## ■ Ampère の法則

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

の右辺第 2 項 (変位電流) と左辺 ( $\nabla \times \mathbf{B}$ ) の大きさ比較すると、

$$\frac{c^{-1} \partial E / \partial t}{|\nabla \times \mathbf{B}|} \sim \frac{1}{c} \frac{L E}{t B} \sim \left(\frac{v}{c}\right)^2 \ll 1$$

したがって変位電流は無視できる。→ 電場の発展方程式がなくなる。電磁波モードを考えない。

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} + \cancel{\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{J} = \frac{c}{4\pi} \nabla \times \mathbf{B}$$

# 誘導方程式

Faraday の法則 ← 電場が必要 (電場の時間発展方程式はない)

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E}$$

**理想 MHD 条件：完全導体** (電気抵抗ゼロ, 電気伝導度  $\infty$ )

流体静止系において電場が 0 となる (電場が 0 になるように電流が自由に流れることが可能)。

実験室系での  $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$  と,  $v$  で動く流体静止系での  $(\mathbf{E}' = 0, \mathbf{B}')$  の関係 (Lorentz 変換)  
 $|v|/c \ll 1$  のとき,

$$\mathbf{E}' = E_{\parallel} + \frac{E_{\perp} + (v/c) \times \mathbf{B}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = E + \left(\frac{v}{c}\right) \times \mathbf{B} = 0 \implies \mathbf{E} = -\left(\frac{v}{c}\right) \times \mathbf{B},$$

$$\mathbf{B}' = B_{\parallel} + \frac{B_{\perp} - (v/c) \times \mathbf{E}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \mathbf{B} \implies \mathbf{B} = \mathbf{B}'$$

速度  $v$  に平行な成分  $\parallel$  と垂直な成分  $\perp$

以下の誘導方程式が得られる。

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (v \times \mathbf{B})$$

# 凍結定理 (Alfvén の定理)

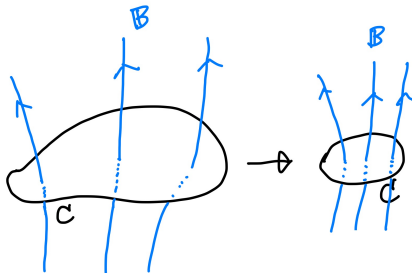
磁束：ある閉曲線  $C$  の中を貫く磁場の面積分

$$\Phi = \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

誘導方程式を使って、磁束の Lagrange 時間微分がゼロ

$$\frac{D\Phi}{Dt} = 0$$

となることが証明できる。このとき、閉曲線  $C$  もその場の流体素片の速度で時間変化することに注意 (下の図は収束するような流れがある場合)。



任意の閉曲線で成り立つ。→ 磁場は流体と共に動く (凍結している)。

# 理想磁気流体力学の基礎方程式

連続の式  $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0$

運動方程式  $\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla P + \underbrace{\frac{1}{c} \mathbf{J} \times \mathbf{B}}_{\text{Lorentz 力}}, \quad \mathbf{J} = \frac{c}{4\pi} \nabla \times \mathbf{B}$

エネルギー方程式  $\frac{\partial}{\partial t} \left( \rho e + \frac{1}{2} \rho v^2 \right) + \nabla \cdot \left\{ \left( \rho e + P + \frac{1}{2} \rho v^2 \right) \mathbf{v} \right\} = \underbrace{\frac{1}{c} (\mathbf{J} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v}}_{\mathbf{v} \cdot \mathbf{J}}$

誘導方程式  $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B})$

状態方程式  $P = (\gamma - 1) \rho e$

変数が  $\rho, \mathbf{v}, e, P, \mathbf{B}$  が 9 個 (3 次元) あり, 方程式が 9 本あるので, 方程式系が閉じる。

# ローレンツ力の性質

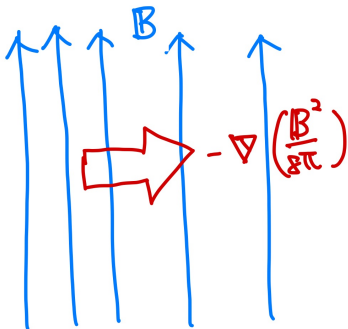
- ローレンツ力  $\mathbf{J} \times \mathbf{B}/c$  は磁場に常に垂直なので、磁場に沿った方向には力が働かない。プラズマは磁場に沿って自由に動ける。
- 流体が受けるローレンツ力は、上記のように2つの項、**磁気圧勾配力**と**磁気張力**に分けることができる。

$$\frac{1}{c} \mathbf{J} \times \mathbf{B} = \frac{1}{4\pi} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} = \underbrace{-\nabla \left( \frac{B^2}{8\pi} \right)}_{\text{磁気圧勾配力}} + \underbrace{\frac{1}{4\pi} \mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{B}}_{\text{磁気張力}}$$

# 磁気圧勾配力 $-\nabla(B^2/8\pi)$

$-\nabla(B^2/8\pi)$  を見ると,  $B^2/8\pi$  があたかも圧力と同じように振舞うことがわかる。  
 $B^2/8\pi$  を磁気圧と呼び,  $-\nabla(B^2/8\pi)$  を磁気圧勾配力という。

たとえば以下の図のように, 右にいくに従って磁力線の間隔が広がっている場合,  
磁力線が密な領域から疎な領域に向かって (右向き) 磁気圧勾配力が働く。



# 磁気張力 $-(\mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{B})/4\pi$

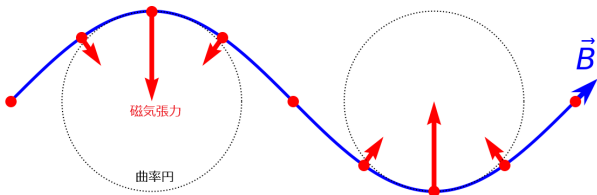
$(\mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{B})/4\pi$  は、磁場が磁場に沿った向きに変化  $(\mathbf{B} \cdot \nabla)$  する場合に働く。

$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  から、まっすぐな磁場で磁場強度が変化することは禁止されているので、磁場が曲がっている場合に働く力である。

$|\mathbf{B}|$  が一定のとき、磁気張力は曲率半径  $R$  を使って表すことができる ( $\hat{\mathbf{B}} = \mathbf{B}/|\mathbf{B}|$ )。

$$\frac{\mathbf{B}}{4\pi} \cdot \nabla \mathbf{B} = \frac{B^2}{4\pi} \hat{\mathbf{B}} \cdot \nabla \hat{\mathbf{B}} = -\frac{B^2}{4\pi} \frac{\hat{\mathbf{n}}}{R}$$

磁気張力は曲率円の中心に向かう向き、つまり磁力線を真っすぐにするように働く。



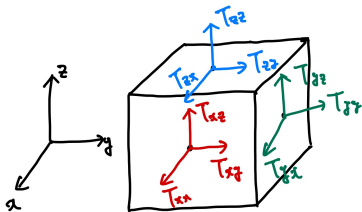
# Maxwell 応力テンソル

ローレンツ力は、 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  を使うと、Maxwell 応力テンソル  $\mathcal{T}$  の発散の形に書き換え可能。

$$\frac{1}{c} (\mathbf{J} \times \mathbf{B})_i = \frac{1}{4\pi} ((\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B})_i = -\underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{B^2}{8\pi} \delta_{ij} - \frac{B_i B_j}{4\pi} \right)}_{=\mathcal{T}_{ij}} + \frac{B_i}{4\pi} \underbrace{\nabla \cdot \mathbf{B}}_{=0}$$

Maxwell 応力テンソルは対称テンソルで、直交座標において成分を露わに書くと以下のように表すことができる。

$$\mathbf{S} = \frac{1}{4\pi} \begin{pmatrix} -B_x^2 + B_y^2 + B_z^2 & -B_x B_y & -B_x B_z \\ -B_y B_x & B_x^2 - B_y^2 + B_z^2 & -B_y B_z \\ -B_z B_x & -B_z B_y & B_x^2 + B_y^2 - B_z^2 \end{pmatrix}$$



立方体を考える

- ガス圧は各面に垂直方向に働く。
- 応力  $S_{ij}$  は、 $i$  方向に垂直な面に働く、 $j$  方向の応力を表す。

# 運動量保存式

運動方程式

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = -\nabla P + \underbrace{\frac{1}{c} \mathbf{J} \times \mathbf{B}}_{\text{Lorentz 力}}$$

は、Maxwell 応力テンソルを使うと、以下の保存系に変形できる。

$$\frac{\partial \rho v_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \{ \rho v_i v_j + P \delta_{ij} + \mathbf{S}_{ij} \} = 0$$

# 全エネルギー保存式

ローレンツ力による仕事率がガスのみエネルギー保存式の源泉項として加わる。ちなみに源泉項は電磁エネルギーの消費  $\mathbf{J} \cdot \mathbf{E}$  に等しい。

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \rho e + \frac{1}{2} \rho v^2 \right) + \nabla \cdot \left\{ \left( \rho e + P + \frac{1}{2} \rho v^2 \right) \mathbf{v} \right\} = \underbrace{\frac{1}{c} (\mathbf{J} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v}}_{= \mathbf{J} \cdot (-\mathbf{v} \times \mathbf{B} / c) = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}}$$

$\mathbf{J} = (c/4\pi) \nabla \times \mathbf{B}$  と誘導方程式を使って、式変形すると以下の式を得る。

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \left( \rho e + \frac{1}{2} \rho v^2 + \frac{\mathbf{B}^2}{8\pi} \right)}_{\text{磁気 E を含めた全 E}} + \nabla \cdot \left\{ \left( \rho e + P + \frac{1}{2} \rho v^2 \right) \mathbf{v} + \underbrace{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}_{\text{Poynting flux}} \right\} = 0$$

Maxwell 応力テンソルを使っても表現できる。

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \rho e + \frac{1}{2} \rho v^2 + \frac{\mathbf{B}^2}{8\pi} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \left( \rho e + P + \frac{\mathbf{B}^2}{8\pi} + \frac{1}{2} \rho v^2 \right) v_i + \mathbf{S}_{ij} v_j \right\} = 0$$

# 磁気流体力学の基礎方程式 (保存形式)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial x_i} = 0$$

$$\frac{\partial \rho v_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \rho v_i v_j + \left( P + \frac{B^2}{8\pi} \right) \delta_{ij} - \frac{B_i B_j}{4\pi} \right\} = 0$$

$$\frac{\partial E_{\text{tot}}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ E_{\text{tot}} v_i + \left( P + \frac{B^2}{8\pi} \right) v_i - \frac{B_i B_j v_j}{4\pi} \right\} = 0, \quad E_{\text{tot}} = \rho e + \frac{1}{2} \rho v^2 + \frac{B^2}{8\pi}$$

$$\frac{\partial B_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (v_i B_j - v_j B_i) = 0$$

$$P = (\gamma - 1) \rho e$$

未知変数が 9 個 ( $\rho, v, e, P, B$ ) で, 方程式が 9 本あるので閉じている。

磁場には拘束条件  $\nabla \cdot B = 0$  があるので, 誘導方程式 3 本のうち独立なのは 2 本のみ。

# 磁気流体力学の線形波動

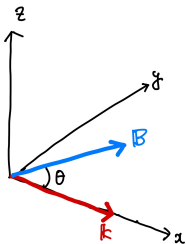
一様磁場に貫かれた静止した一様ガスを考える。このガスに微小ゆらぎを考える。

$$\rho = \rho_0 + \delta\rho, \quad \mathbf{v} = \delta\mathbf{v}, \quad P = P_0 + \delta P, \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \delta\mathbf{B}$$

摂動を  $\delta Q \propto e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)}$  で展開し、二次の項は小さいので無視する。

(任意の波形は様々な波数の平面波  $e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega(k)t)}$  の重ね合わせで表現できるので、 $\omega$  と波数  $k$  の関係式 (分散関係) がわかればよい)

波数ベクトル  $\mathbf{k}$  が  $x$  方向と平行であるとし、磁場  $\mathbf{B}_0$  は  $x$ - $y$  平面内にあるとする (一般性を失わない)。



試しに連続の式を線形化してみる。

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_0 + \delta\rho) + \nabla \cdot \underbrace{\{(\rho_0 + \delta\rho)\delta\mathbf{v}\}}_{=\rho_0\delta\mathbf{v}} = 0$$

以下の線型方程式を得る。

$$-i\omega\delta\rho + i\rho_0\mathbf{k} \cdot \delta\mathbf{v} = 0$$

同様に他の方程式も線形化する。

# 線形波動の分散関係

分散関係： $\omega$  と  $k$  が満たすべき関係

$$\underbrace{\left\{ \omega^2 - \frac{(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2}{4\pi\rho_0} \right\}}_{z \text{ 軸に沿った振動}} \underbrace{\left\{ \omega^4 - \left( c_s^2 + \frac{B_0^2}{4\pi\rho_0} \right) k^2 \omega^2 + c_s^2 \frac{(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2}{4\pi\rho_0} \right\}}_{x-y \text{ 平面内での振動}} \times \underbrace{\omega}_{\text{伝播しないモード}} = 0$$

$c_s = \sqrt{\gamma P_0 / \rho_0}$  は音速である。

基礎方程式には、誘導方程式の 1 成分を除いて、合計 7 個の時間微分が存在  
→ 以下の 7 種類の波が存在

- $k$  に順方向と逆方向に伝播する Alfvén 波
- $k$  に順方向と逆方向に伝播する fast 波
- $k$  に順方向と逆方向に伝播する slow 波
- entropy 波

# Alfvén 波

磁気流体特有の波動。磁気張力を復元力として伝播する。密度と圧力が変動しない横波 ( $\delta\rho = \delta P = 0$ ,  $\delta v \perp k$ ,  $\delta B \perp k$ )。

磁場と速度が  $z$  方向 ( $B_0$  と  $k$  が張る平面と垂直方向) に揺らぐ。

位相速度は,

$$\frac{\omega}{k} = \pm \frac{B_0 \cdot \hat{k}}{\sqrt{4\pi\rho_0}} = \pm \frac{B_0}{\sqrt{4\pi\rho_0}} \cos\theta$$

$B_0$  と平行な方向に最も早く伝播。  $c_A = B_0/\sqrt{4\pi\rho_0}$  を Alfvén 速度と呼ぶ。

$\omega > 0$  が,  $k$  の方向に伝播する波で,  $\omega < 0$  が,  $k$  と逆方向に伝播する波を表している。

# fast 波と slow 波

$B_0$  と  $k$  が張る平面内で物理量が揺らぐ波。

$$\left(\frac{\omega}{k}\right)^2 = \frac{1}{2} \left\{ c_A^2 + c_s^2 \pm \sqrt{(c_A^2 + c_s^2)^2 - 4c_A^2 c_s^2 \cos^2 \theta} \right\}$$

±のうち、+の方を fast 波、-の方を slow 波と呼ぶ

## ■ $k \parallel B_0$ (磁場 $B_0$ に平行な方向に伝播する波)

- 磁場が変動しない縦波：音波、 $\omega/k = \pm c_s$
- 磁場が変動する横波：擬 Alfvén 波、 $\omega/k = \pm c_A$

慣習で、位相速度が速い方を fast 波と呼び、遅い方を slow 波と呼ぶ。  
波の性質とは関係がない。

- 磁場が強い場合：(fast 波が擬 Alfvén 波, slow 波が音波)
- 磁場が弱い場合：(fast 波が音波, slow 波が擬 Alfvén 波)

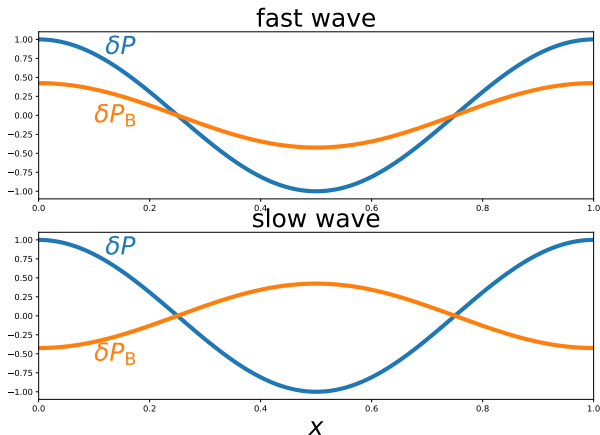
## ■ $k \perp B_0$ (磁場 $B_0$ に垂直な方向に伝播する波)

磁場強度に依らず、

- fast 波：磁気圧が復元力に加わる： $\omega/k = \pm \sqrt{c_s^2 + c_A^2}$
- slow 波：位相速度 0

# fast 波と slow 波の固有関数の違い

磁場に対して  $45^\circ$  方向に斜め伝播する fast 波と slow 波



- fast 波：ガス圧が大きい (小さい) 場所で磁気圧が大きい (小さい)
- slow 波：ガス圧が小さい (大きい) 場所で磁気圧が小さい (大きい)

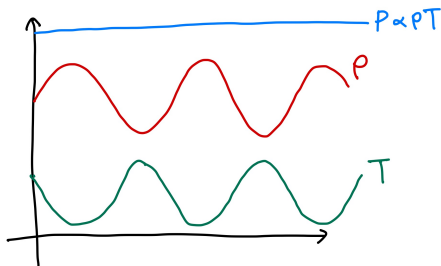
# entropy 波

振動数が 0 なので，伝播しないモード。

$$\omega = 0$$

固有関数は，

$$\delta\rho = \text{finite}, \quad \delta P = 0, \quad \delta v = \delta B = 0$$

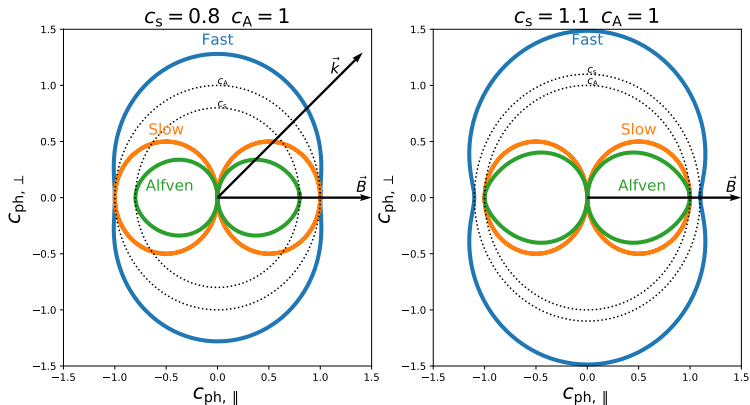


圧力が一定の下で，密度と温度が変動している。

エントロピー摂動  $\delta S = \delta P/P_0 - \gamma\delta\rho/\rho_0$  が有限なので，entropy 波と呼ばれる。

# Friedrichs

$B_0$  ( $x$  軸に平行) に対して角度を成して伝播する3つの波 (fast, Alfvén, slow) の位相速度を原点からの距離で表した図。

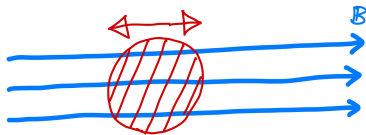


- $0 \leq c_{\text{slow}} \leq c_A \leq c_{\text{fast}}$  が成り立つ
- fast 波は四方八方に広がるが, slow 波と Alfvén 波は, 磁場  $B_0$  と垂直方向には伝播できない。

# 磁束凍結のダイナミクスへの影響

## Strong B

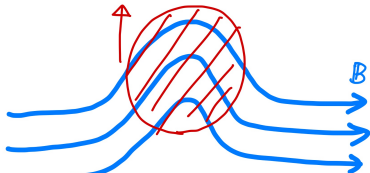
磁場は針金のよう。  
流体素片は磁場に沿ってしか動けない。



$$\frac{B^2}{8\pi} \gg P_{\text{gas}} + \rho v^2$$

## Weak B

磁場はやわやわ。  
磁場は流体素片の運動によって曲げられる。



$$\frac{B^2}{8\pi} \ll P_{\text{gas}} + \rho v^2$$

ガスダイナミクスにおける磁場強度の相対的な重要度の指標としてプラズマベータ  $\beta$  や、Alfvén マッハ数  $M_A$  がよく使われる。

$$\beta = \frac{P_{\text{gas}}}{B^2/8\pi}, \quad M_A = \frac{|v|}{|B|/\sqrt{4\pi\rho}}$$

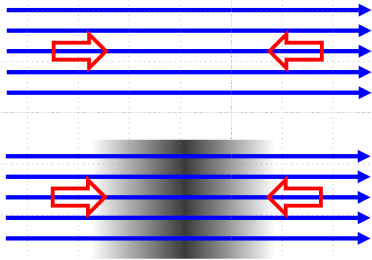
# ローレンツ力による実効的な比熱比

$$P \propto \rho^\gamma$$

断熱の状態でガスを圧縮した際に ( $\rho$  増), 圧力がどの程度増加するか ( $\gamma$  大  $\rightarrow$  カチコチ)。

## 磁場に対し平行な向きに圧縮

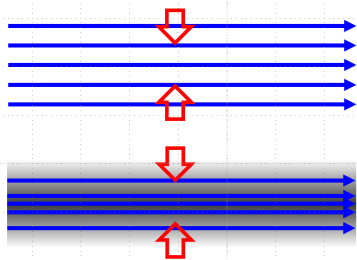
流体素片はガス圧しか受けない。



$$P_{\text{tot}} = P_{\text{gas}}$$

## 磁場に対し垂直な向きに圧縮

凍結定理より,  $|B| \propto \rho$



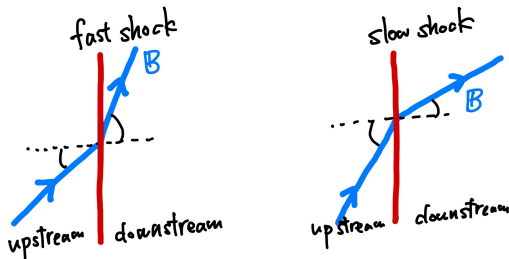
$$P_{\text{tot}} = \underbrace{P_{\text{gas}}}_{\propto \rho^\gamma} + \underbrace{\frac{B^2}{8\pi}}_{\propto \rho^2}$$

磁場に対し垂直な向きに圧縮する場合, 仮に磁場が支配的だと, ガスはあまり圧縮されなくなる ( $\gamma_{\text{eff}} = 2$ )。

# 衝撃波 (fast shock と slow shock)

- 流体の場合と同じ様に，磁気流体方程式の非線形性から衝撃波が生じる。
- 磁気流体の場合は，fast 波に対応する fast shock と，slow 波に対応する slow shock の二種類がある。

衝撃波を通過後の磁場の進化が異なる。



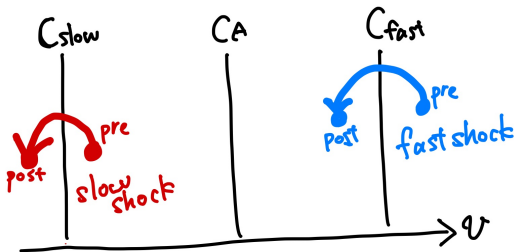
$B_x$  は一定 ( $\partial B_x / \partial x = 0$ ,  $x$  軸は衝撃波面の法線方向)

- fast shock では，衝撃波通過後に磁場が**増幅**する。
- slow shock では，衝撃波通過後に磁場が**減衰**する。

線形波動 (fast 波と slow 波) の固有関数と同じ性質

# 衝撃波の性質

- fast shock と slow shock の, 上流 (pre) から下流 (post) への速度ジャンプは以下になる。



- 共に衝撃波面を介して, 磁場が貼る平面は回転しない。
  - 衝撃波前面において, 磁場が  $x-y$  平面内にある場合, 衝撃波通過後に  $B_z$  は生じない。