

**国立天文台 CfCA 流体学校**

**Smoothed Particle  
Magnetohydrodynamics**

**実習の手引 (2024年度版)**

**国立天文台 天文シミュレーションプロジェクト**

**文責：岩崎一成**

# 目次

<b>第1章 Smoothed Particle Magnetohydrodynamics</b>	<b>1</b>
1.1 基礎方程式	1
1.2 無次元化	1
1.3 Smoothed Particle Magnetohydrodynamics	2
1.3.1 Godunov Smoothed Particle Magnetohydrodynamics	2
<b>第2章 実習</b>	<b>4</b>
2.1 確認事項	4
2.1.1 事前準備	4
2.1.2 テスト問題一覧	4
2.1.3 設定ファイル param.toml	4
2.2 テスト問題	6
2.2.1 円偏光 Alfvén 波の伝播	6
2.2.2 Orszag-Tang 渦	9
2.2.3 Blast Wave	11
2.2.4 MHD Kelvin-Helmholtz 不安定性	13
2.2.5 MHD Rayleigh-Taylor 不安定性	16
2.2.6 星形成アウトフロー (回転している磁化した分子雲コアの重力収縮)	19
<b>付録 A 粒子データへの格子へのマップ</b>	<b>22</b>

# 第1章 Smoothed Particle Magnetohydrodynamics

## 1.1 基礎方程式

Lagrange 描像での保存形式で記述した磁気流体方程式は,

$$\frac{D\rho^{-1}}{Dt} - \frac{1}{\rho}\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (1.1)$$

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} + \frac{1}{\rho}\nabla \cdot \mathcal{T} = 0, \quad (1.2)$$

$$\frac{DE_{\text{tot}}}{Dt} + \frac{1}{\rho}\nabla \cdot (\mathcal{T} \cdot \mathbf{v}) = 0, \quad (1.3)$$

$$\frac{D}{Dt} \left( \frac{\mathbf{B}}{\rho} \right) = \frac{\mathbf{B}}{\rho} \cdot \nabla \mathbf{v}, \quad (1.4)$$

となる。 $\mathcal{T}$  は応力テンソル

$$\mathcal{T} = \left( P + \frac{\mathbf{B}^2}{8\pi} \right) \mathcal{I} + \frac{\mathbf{B} \otimes \mathbf{B}}{4\pi} \quad (1.5)$$

である。ここで  $\mathcal{I}$  は単位行列である。 $E_{\text{tot}}$  は単位質量当たりの全エネルギー

$$E_{\text{tot}} = \frac{P}{(\gamma - 1)\rho} + \frac{1}{2}\mathbf{v}^2 + \frac{\mathbf{B}^2}{8\pi\rho} \quad (1.6)$$

## 1.2 無次元化

無次元化とは、考えている問題の特徴的な量を使って規格化することである。例えば時間  $t$  を、特徴的な時間  $t_0$  を使って割ると、無次元量  $\tilde{t} = t/t_0$  を定義できる。同様に全ての物理量を無次元化する。cgs Gauss 単位系では、3種類の量を基に全ての物理量を無次元化できる。

ここでは、問題の特徴的な時間  $t_0$  と特徴的な長さ  $L_0$ ・特徴的な密度  $\rho_0$  で方程式を無次元化することを考える。時間と長さ・密度以外の物理量は  $t_0$  と  $L_0 \cdot \rho_0$  の組み合わせで無次元化できる。例えば、速度は  $v_0 = L_0/t_0$ 、質量は  $M_0 = \rho_0 L_0^3$ 、単位質量当たりのエネルギーは  $E_0 = (L_0/t_0)^2$  で無次元化する。

物理量  $Q$  を特徴的な量  $Q_0$  で無次元化した値を  $\tilde{Q} = Q/Q_0$  とする。 $Q = \tilde{Q}Q_0$  を磁気流体の基礎方程式に代入すると、以下の方程式を得る。

$$\frac{D\tilde{\rho}^{-1}}{D\tilde{t}} - \frac{1}{\tilde{\rho}}\tilde{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{v}} = 0, \quad (1.7)$$

$$\frac{D\tilde{\mathbf{v}}}{D\tilde{t}} + \frac{1}{\tilde{\rho}}\tilde{\nabla} \cdot \tilde{\mathcal{T}} = 0, \quad (1.8)$$

$$\frac{D\tilde{E}_{\text{tot}}}{D\tilde{t}} + \frac{1}{\tilde{\rho}} \tilde{\nabla} \cdot (\tilde{\mathcal{T}} \cdot \tilde{\mathbf{v}}) = 0, \quad (1.9)$$

$$\frac{D}{D\tilde{t}} \left( \frac{\tilde{\mathbf{B}}}{\tilde{\rho}} \right) = \frac{\tilde{\mathbf{B}}}{\tilde{\rho}} \cdot \tilde{\nabla} \tilde{\mathbf{v}}, \quad (1.10)$$

となり、元の方程式を全く同じになる。ここで、磁場を  $\sqrt{\rho_0}L_0/t_0$  ではなく、 $\sqrt{4\pi\rho_0}L_0/t_0$  を使って無次元化すると、 $\tilde{\mathcal{T}}$  は、

$$\tilde{\mathcal{T}} = \left( \tilde{P} + \frac{\tilde{\mathbf{B}}^2}{2} \right) \mathcal{I} + \tilde{\mathbf{B}} \otimes \tilde{\mathbf{B}} \quad (1.11)$$

となり、 $4\pi$  が消えて簡単な形になる。多くの公開コードでは  $4\pi$  を除いた磁気流体方程式を用いる。磁場を次元量から無次元量にするとき、または無次元量から次元量に戻すときには、 $\sqrt{4\pi}$  を付けるのを忘れないようにする。 $\sqrt{4\pi} \sim 3.5$  程度なので、忘れると磁気圧が 10 倍以上変わってしまう。今回は次元量にしないので問題ない。

## 1.3 Smoothed Particle Magnetohydrodynamics

### 1.3.1 Godunov Smoothed Particle Magnetohydrodynamics

ここではサンプルコードで実装している Godunov SPMHD 方程式を載せておく。詳細は Iwasaki and Inutsuka (2011) を参照されたい。ただし、その後の試行錯誤の過程で磁場の発展方程式が変わっているが、論文にしていないので、興味があれば問い合わせしてほしい。時間積分法は NanoASURA に実装されている多段時間積分法の Leap-frog 法を使っている。

本来の Godunov SPH では、積分を残したまま定式化し、最終的にその積分を 3 次あるいは 2 次精度の内挿をつかって評価している (Inutsuka, 2002)。ここでは積分の中の Kernel 関数をデルタ関数に置き換えるという最も粗い近似をした GSPH 方程式を使っていることに注意してほしい。得られる式はいわゆる Standard SPH に似た形の式となる。

$$\rho_i = \sum_j m_j W(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j, h_i), \quad h_i = C_h \left( \frac{m_i}{\rho_i} \right)^{1/d} \quad (1.12)$$

$$\begin{aligned} \frac{d(v_i)_\mu}{dt} &= \sum_j m_j \left( \frac{(\mathcal{T}_i)_{\mu\nu}^*}{\Omega_i \rho_i^2} \frac{\partial W(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j, h_i)}{\partial (x_i)_\nu} + \frac{(\mathcal{T}_i)_{\mu\nu}^*}{\Omega_j \rho_j^2} \frac{\partial W(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j, h_j)}{\partial (x_i)_\nu} \right) \\ &\quad - \xi (B_i)_\mu \sum_j m_j \left( \frac{(B_i)_\nu}{\Omega_i \rho_i^2} \frac{\partial W(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j, h_i)}{\partial (x_i)_\nu} + \frac{(B_j)_\nu}{\Omega_j \rho_j^2} \frac{\partial W(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j, h_j)}{\partial (x_i)_\nu} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{de_{\text{tot},i}}{dt} &= \sum_j m_j \left( \frac{(\mathcal{T}_i)_{\mu\nu}^* (v_i)_\nu^*}{\Omega_i \rho_i^2} \frac{\partial W(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j, h_i)}{\partial (x_i)_\nu} + \frac{(\mathcal{T}_j)_{\mu\nu}^* (v_j)_\nu^*}{\Omega_j \rho_j^2} \frac{\partial W(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j, h_j)}{\partial (x_i)_\nu} \right) \\ &\quad - \xi \mathbf{B}_i \cdot \mathbf{v}_i \sum_j m_j \left( \frac{(B_i)_\nu}{\Omega_i \rho_i^2} \frac{\partial W(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j, h_i)}{\partial (x_i)_\nu} + \frac{(B_j)_\nu}{\Omega_j \rho_j^2} \frac{\partial W(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j, h_j)}{\partial (x_i)_\nu} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left( \frac{(B_i)_\mu}{\rho_i} \right) &= \frac{(B_i)_\nu}{\rho_i^2 \Omega_i} \sum_j m_j \{ (v_i)_\mu - (v_j)_\nu \} \frac{\partial W(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j, h_i)}{\partial (x_i)_\mu} \\
&+ \sum_j m_j \text{sign}(B_{\parallel,ij}) \frac{(B_{\perp,R})_\mu - (B_{\perp,L})_\mu}{\sqrt{\rho_i} + \sqrt{\rho_j}} \left( \frac{(B_i)_\nu}{\Omega_i \rho_i^2} \frac{\partial W(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j, h_i)}{\partial (x_i)_\nu} + \frac{(B_j)_\nu}{\Omega_j \rho_j^2} \frac{\partial W(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j, h_j)}{\partial (x_i)_\nu} \right) \\
&- \sum_j m_j \psi^* \left( \frac{1}{\Omega_i \rho_i^2} \frac{\partial W(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j, h_i)}{\partial (x_i)_\nu} + \frac{1}{\Omega_j \rho_j^2} \frac{\partial W(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j, h_j)}{\partial (x_i)_\nu} \right)
\end{aligned} \tag{1.13}$$

$$\frac{d\psi_i}{dt} = \frac{(v_i)_\mu}{\rho_i} \sum_j m_j (\psi_j - \psi_i) \frac{\partial W(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j, h_i)}{\partial (x_i)_\mu} - \frac{c_h}{\rho_i} \sum_j m_j ((B_j)_\mu - (B_i)_\mu) \frac{\partial W(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j, h_i)}{\partial (x_i)_\mu} - \frac{\psi_i}{\tau} \tag{1.14}$$

ここでアスタリスク「\*」が付いた量は、 $i$  粒子と  $j$  粒子を左右の状態とする近似的なリーマン問題の解における中間状態を表す (Lagrange 法では、Euler 法の Godunov 法のような場合分けが不要で、中間状態を取ればよい)。リーマン問題の初期不連続面の左右の状態 ( $Q_R$  と  $Q_L$ ) は MUSCL 法を応用して、 $i$  粒子の位置と  $j$  粒子の位置から適切な勾配を使って初期不連続面の位置  $(\mathbf{x}_i + \mathbf{x}_j)/2$  に内挿して求めている (Iwasaki and Inutsuka, 2011)。

## 第2章 実習

### 2.1 確認事項

#### 2.1.1 事前準備

XD2000 と解析サーバにおいて, `/home/hydro00/NanoASURAhydro2024-mhd.tar.gz` をコピーする。後の作業は昨日と同じ。

#### 2.1.2 テスト問題一覧

problems	runs でのディレクトリ	可視化設定ファイル
円偏光 Alfvén 波	MHDalfwave	param_alf.toml
Orszag-Tang 渦	MHDot	param_OT.toml
Blast wave	MHDbw	param_BW.toml
Kelvin-Helmholtz 不安定性	MHDkh	param_KH.toml
Rayleigh-Taylor 不安定性	MHDrt	param_RT.toml
星形成アウトフロー	MHDcollapse	param_GC.toml

可視化の設定ファイルを分けている。

```
./plot.out param_alf.toml
```

#### 2.1.3 設定ファイル param.toml

各作業ディレクトリには `param.toml` がある。

- [Mode]
  - `NParticles` 粒子数。ただし, 全粒子数とは限らないので, 各テスト問題の説明を参照。
- [IO]
  - `OutDir`: 出力ファイルを入れるディレクトリ名を指定。パラメータを変えて計算する場合には, 異なる名前を付ける。
  - `RunName`: 出力ファイルの接頭語。
  - `OutputFileNumber`: 計算終了時間 `TEnd` までに出力するファイルの数。したがって, `TEnd` を `OutputFileNumber` で割った時間間隔でファイルが生成される。

- `dNstepOutput`: 1 を超える値にすると, アウトプットファイルを, `dNstepOutput` 毎に出力する。星形成アウトフローの問題で使う。
- [Hydro]
  - `SelectKernelType = 5`:  
Kernel 関数を指定。デフォルト設定では, 講師の趣味で Gaussian kernel を主に使っている。ただし, 星形成アウトフローテストのみ計算時間を短くするために cubic spline がデフォルト。
  - `KernelEvaluationType = 1`  
Smoothing 長を求める方法を指定。SPMHD ではこれを 1 で固定する。
  - `KernelEta = 1.2 (m_i/\rho_i)^d/\rho_i` の値。
  - `FacSrcTermDivB = 0.5`  
強磁場環境下で生じる数値不安定性を消すために導入した  $\nabla \cdot B$  に比例する源泉項の大きさを調整するパラメータ。
  - `DivergenceCleaningDampingParameter = 0.2`
- [Problem]  
問題設定を変えるためのパラメータ

## 2.2 テスト問題

### 2.2.1 円偏光 Alfvén 波の伝播

一様磁場  $B_0$  に沿って伝播する円偏光 Alfvén 波は、磁場強度  $|B_0 + \delta B|$  が厳密に一定であるため、有限振幅でも厳密解である。厳密解との比較で誤差を評価できるため、よく磁気流体計算法のテスト問題として使われる。

#### 問題設定

非摂動状態は一様ガス (密度  $\rho_0 = 1$ , 圧力  $P_0 = 0.1$ , 速度 0) で、 $x$  方向に対し  $\theta = 30^\circ$  の角度を成す一様磁場  $B_0$  (強度 1) に貫かれている。磁場の方向を  $\xi$  軸とし、それに垂直な方向を  $\eta$  軸とする。ただし、 $\xi$  軸と  $\eta$  軸はともに  $x$ - $y$  平面内にある。 $\xi$  方向に伝播する振幅  $A = 0.1$  で波数  $k = 2\pi$  の円偏光 Alfvén 波の厳密解は、

$$\begin{pmatrix} B_\xi \\ B_\eta \\ B_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_0 \\ A \sin(k(\xi - c_A t)) \\ A \cos(k(\xi - c_A t)) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} v_\xi \\ v_\eta \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -A \sin(k(\xi - c_A t)) \\ -A \cos(k(\xi - c_A t)) \end{pmatrix},$$

となる ( $\xi = x \cos \theta + y \sin \theta$ )。Alfvén 速度  $c_A$  は、 $B_0/\sqrt{\rho_0}$  である (磁場を  $\sqrt{4\pi\rho_0}L_0/t_0$  で無次元化しているので、 $\sqrt{4\pi}$  が無い。第 1.2 章参照)。 $(x, y, z)$  座標系に変換すると、

$$\begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_0 \cos \theta - A \sin(k(\xi - c_A t)) \sin \theta \\ B_0 \sin \theta + A \sin(k(\xi - c_A t)) \cos \theta \\ A \cos(k(\xi - c_A t)) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \sin(k(\xi - c_A t)) \sin \theta \\ -A \sin(k(\xi - c_A t)) \cos \theta \\ -A \cos(k(\xi - c_A t)) \end{pmatrix},$$

#### 初期条件の実装

計算領域は  $0 \leq x \leq 2/\sqrt{3}$ ,  $0 \leq y \leq 2$  とする。右図のように正三角形を敷き詰めた粒子配置をとる。param.toml の NParticles で、 $x$  方向に並べる粒子数を指定する。 $y$  方向に並べる粒子数は  $x$  方向に並べる粒子数の 2 倍である。

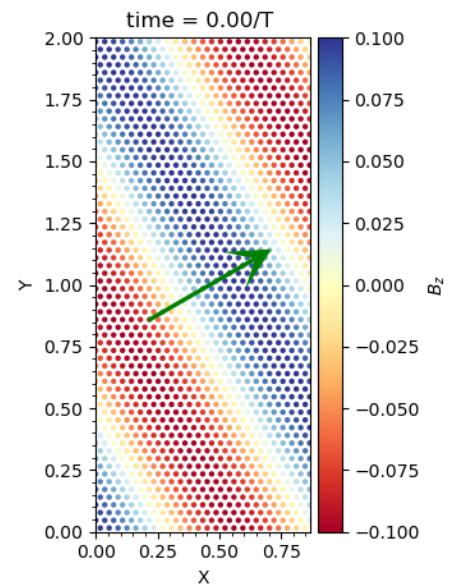


図 2.1: 円偏光 Alfvén 波問題の初期条件。カラーマップは  $B_z$  で、緑矢印は  $B_0$  の方向を表す。

## 可視化

ソースコードは plot/PlotAlfvenWave.c

`./plot.out`

param.toml での default 設定

```
[Mode]
  PlotType = 9
  WriteMode = 2 # 0->pdf, 1->eps, 2->png
  ShowTime = 1

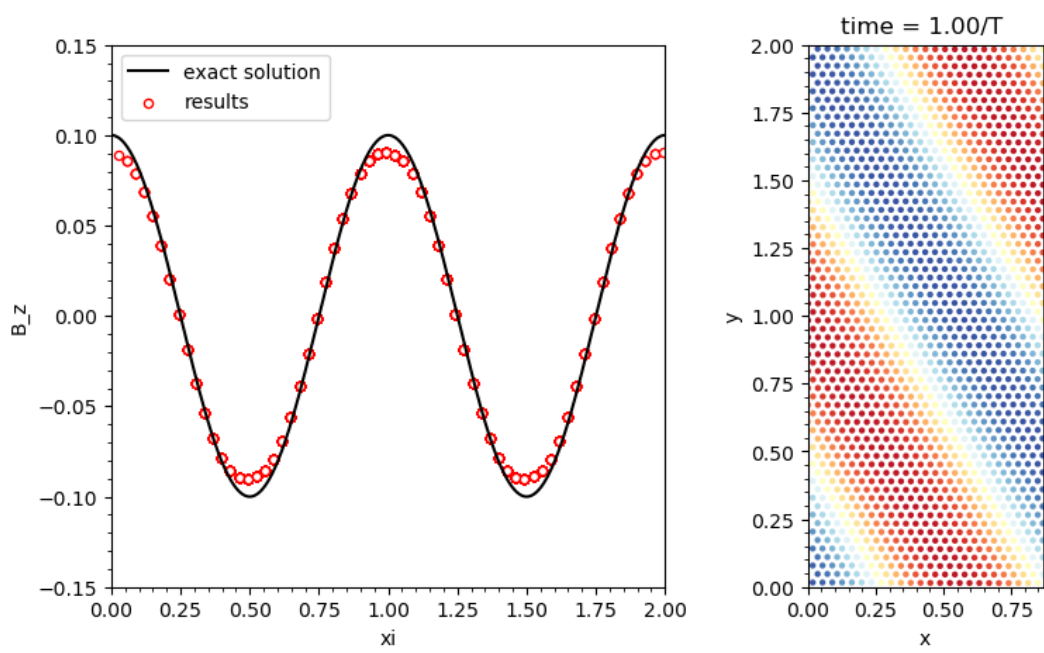
[TargetFiles]
  FileStart = 0
  FileEnd = 100

.....

[AlfvenWave]
  OutDir = "./data"
  FileName = "alfvenwave"
  DataDir = "../runs/MHDalfwave/data"

  PlotType = 0 # 0=1d profile and 2d map of Beta
  Xmin = 0.0
  Xmax = 1.154700538379251 # 2/sqrt(3)
  Ymin = 0.0
  Ymax = 2.0
  GridSize = 64 # grid number along y
```

実行すると  $\xi$  に沿った  $B_z$  の 1 次元分布と  $B_z$  の 2 次元マップが生成される。下の例は、1 周期後のデータで生成した図である。



## 実習

- 誤差  $\epsilon$  を計算する。PlotAlfvénWave.c を編集する。
- runs/MHDalfven において、粒子数 NParticles を変えて計算を実行し、誤差  $\epsilon$  がどのように粒子数に依存するかを調べる。

## 2.2.2 Orszag-Tang 渦

Orszag and Tang (1979) において 2 次元非圧縮乱流を調べるために設定された問題。磁気流体計算法のテスト問題としてよく使われるが、厳密解がなく、また数値的に厳しい問題でもないのので、デモンストレーション的な立ち位置にある。

### 問題設定

計算領域は  $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$  で、次の初期条件を設定する。

$$\rho = \frac{25}{36\pi}, \quad P = \frac{5}{12\pi}, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} -\sin(2\pi y) \\ \sin(2\pi x) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \begin{pmatrix} -\sin(2\pi y) \\ \sin(4\pi x) \\ 0 \end{pmatrix},$$

比熱比  $\gamma$  は  $5/3$  である。図 2.2 は初期条件を示している。

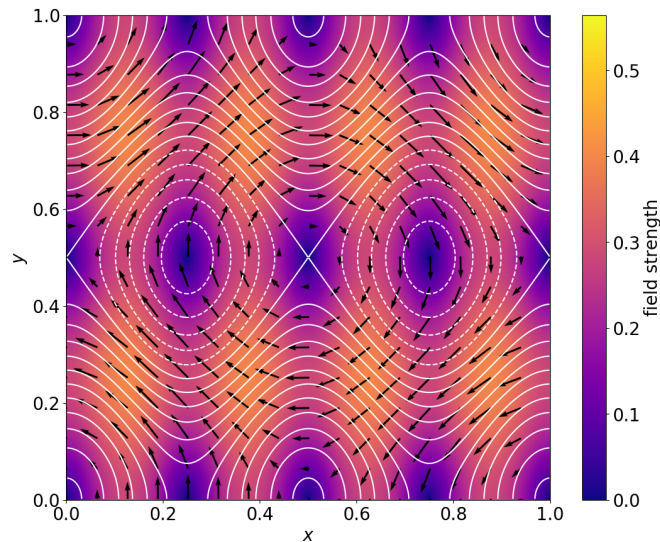


図 2.2: Orszag-Tang 渦問題の初期条件。カラーマップは磁場強度を、線は磁力線を、矢印は速度場を表す。

### 初期条件の実装とパラメータ

src/setup/SetupMHDOrszagTang.c

粒子を格子状に配置する。

param.toml において変更可能なパラメータは以下である。

- [Mode]
  - NParticles:  $y$  方向に沿った粒子数を設定する (default 値は 256 で、全粒子数は  $256 \times 256$  となる)。

- [IO]
  - OutDir: 出力ファイルを格納するディレクトリ名
  - RunName: 出力ファイルの接頭語
  - OutputFileNumber: 計算終了時刻 TEnd までに出力するファイル数。  
つまり, 時間間隔 TEnd/OutputFileNumber で出力される。
- [Time]
  - TEnd: 計算終了時間

## 可視化

ソースコードは plot/PlotMHDOrszagTang.c である。

- PlotType = 0: 密度分布 (左) と磁場強度分布 (右)。(粒子位置に色の付いた○を表示)。  
以下の図は  $t = 0.5$  での結果。
- PlotType = 1: 左図: 密度分布 (粒子位置に色を付けたマーカーを置く)。右図: 密度分布 (格子にマップ) と磁力線。以下の図は  $t = 0.5$  での結果。

### 2.2.3 Blast Wave

Blast wave は超新星爆発のような爆発現象を模擬したテスト問題である。初期条件として一様磁場に貫かれた一様な静止したガスを用意し、高圧ガスを小さい領域に置く。高圧ガスは周囲の低圧ガスに向かって膨張し、低圧ガス中に衝撃波が生じる。

#### 問題設定

初期条件として、一様な低圧ガス (密度は 1, 圧力は  $P_0$ ) を用意する。さらに計算領域 ( $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ ) の中心から半径  $r_0$  の領域に高圧ガス (密度は 1, 圧力は  $P_{hot}$ ) を置く。低圧ガスと高圧ガスともに一様な磁場 (強度は  $B_0$ , 斜め  $45^\circ$  方向を向く) に貫かれている。

ここでは厳しい問題として、強磁場環境下での Blast wave 問題を考える。サンプルコードで採用しているパラメータは  $P_0 = 1, P_{hot} = 100, B_0 = 10, r_0 = 0.125$  を採用する (Londrillo and Del Zanna, 2000)。対応するプラズマ  $\beta$  は 0.02 である。

#### 初期条件の実装

ソースコードは `src/setup/SetupMHDBlastWave.c` 等質量の SPH 粒子を格子状に配置する。初期条件の通りに各粒子の物理量を与える。

#### 計算の実行

##### 可視化

可視化作業を行う `nanoasura/plot` に移動する。

ソースコードは, `plot/PlotMHDBlastWave.c`

パラメータファイルは, `param_BW.toml`

- `PlotType=0`: 密度分布 (左) と磁場強度分布 (右)。粒子位置に色の付いた  $\circ$  を表示
- `PlotType=1`: 密度分布 (左) と磁場強度分布 (右)。粒子データをグリッドにマップする。磁力線も表示。

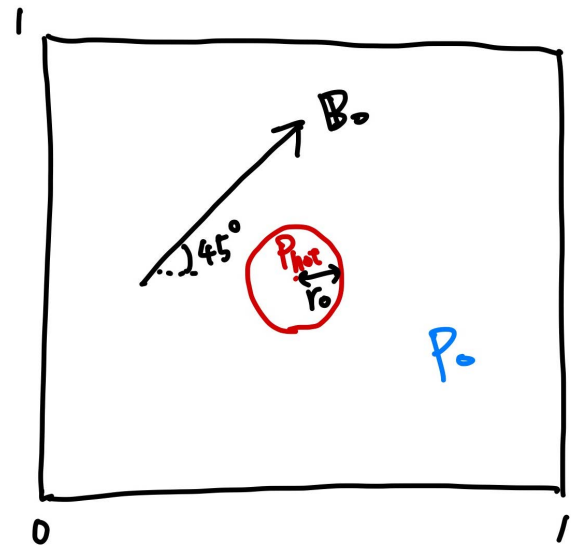


図 2.3: Blast wave 問題の初期条件

## 実習

各種パラメータを変更して実行してみる。

param.toml において変更可能なパラメータ

- [Mode]
  - NParticles:  $y$  方向に沿った粒子数を設定する (default 値は 256 で, 全粒子数は  $256 \times 256$  となる)。
- [IO]
  - OutDir: 出力ファイルを格納するディレクトリ名
  - RunName: 出力ファイルの接頭語
  - OutputFileNumber: 計算終了時刻 TEnd までに出力するファイル数。  
つまり, 時間間隔 TEnd/OutputFileNumber で出力される。
- [Time]
  - TEnd: 計算終了時間
- [Hydro]
  - FacSrcTermDivB:  $\nabla \cdot B$  に比例する源泉項の大きさをコントロールするパラメータ。デフォルト値は 0.5
- [Problem]
  - InitialFieldStrength: 初期磁場強度 ( $B_0$  のこと)

特に磁場強度  $B_0$  を変えて, Blast wave の進化がどのように変わるのかを調べてみる。磁場強度を弱くする方向に変えるのは問題ないが, 強い方向に変える場合は計算が破綻する可能性がある (dt が異常に小さくなる)。計算が破綻したら, 源泉項による安定化の効果を強めるため FacSrcTermDivB=1 にしてみる。

## 2.2.4 MHD Kelvin-Helmholtz 不安定性

### 理論

物理状態の異なる流体が接触する不連続面 (接触不連続面) を介して、不連続面に沿った速度成分に差がある場合に生じる不安定性の一つである。

以下の問題設定を考える (図 2.4)。 $y = 0$  にある不連続面を介して、 $y < 0$  と  $y > 0$  にそれぞれ一様な流体 1 と流体 2 が存在し、圧力平衡状態にある。 $y < 0$  と  $y > 0$  にあるガスの物理量をそれぞれ下付き添え字 1 と 2 を付けて表す。流体 1 と流体 2 は不連続面に沿った方向に速度  $v_{x1}$  と  $v_{x2}$  で運動している。

微小な揺らぎを与えて、その時間発展を線形解析で調べる。詳細は参考文献 (Chandrasekhar, 1961) を読んでもらうことにして、ここでは結果のみを示そう。非圧縮極限において波数  $k$  の揺らぎの成長率は、

$$\Gamma = k|v_{x1} - v_{x2}| \frac{\sqrt{\rho_1 \rho_2}}{\rho_1 + \rho_2} \quad (2.1)$$

で与えられる。成長率は流体間の速度差に比例する。密度差がある場合は、等密度  $\rho_1 = \rho_2$  のときに成長率が最大となり、密度差が大きくなるに従い成長率が下がる。成長率は波数に比例して、小さなスケールの揺らぎが、より大きな成長率で成長する。これは接触面の厚みが 0 と仮定していることが原因である。接触面の厚み  $a$  を考慮した場合は、 $k > a^{-1}$  で成長率が減少する。

次に磁場がある場合について考える。一様磁場 (強度  $B$ ) が剪断流の方向に沿っている場合、成長率は以下のように修正される (Chandrasekhar, 1961)。

$$\Gamma = k \sqrt{(v_{x1} - v_{x2})^2 \frac{\rho_1 \rho_2}{(\rho_1 + \rho_2)^2} - \frac{2B^2}{\rho_1 + \rho_2}} \quad (2.2)$$

KH 不安定性が成長するためには、式 2.2 の右辺の平方根の中が正でなければならない。したがって、以下の不安定条件を導くことができる。

$$\frac{2B}{\sqrt{\{(\rho_1^{-1} + \rho_2^{-1})/2\}^{-1}}} < |v_{x1} - v_{x2}| \quad (2.3)$$

右辺は Alfvén 速度の分母の密度を、流体 1 と流体 2 の密度の調和平均にした形になっている。流体 1 と 2 で密度が等しい場合、Alfvén 速度が速度差の半分より大きいときに安定となる ( $c_A > |v_{x1} - v_{x2}|/2$ )。

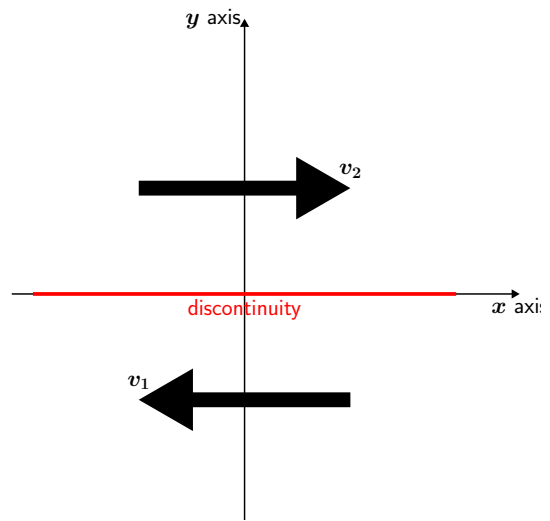


図 2.4: Kelvin-Helmholtz 不安定性の問題設定

## 問題設定

計算領域を  $0 \leq x, y \leq 1$  とする。周期境界条件を課すために、2枚の渦板を  $y - 1/2 = \pm 1/4$  に置く。初期分布は

$$Q = \begin{cases} Q_h & \text{for } |y - 1/2| \leq 1/4 \\ Q_l & \text{for } |y - 1/2| > 1/4 \end{cases} \quad (2.4)$$

とする。 $|y - 1/2| \leq 1/4$  の流体変数には添字 h を、 $|y - 1/2| > 1/4$  の流体変数には添字 l を付ける。サンプルコードで設定している値を以下に示す。

$$\begin{pmatrix} \rho_h \\ v_{x,h} \\ v_{y,h} \\ v_{z,h} \\ P_h \\ B_{x,h} \\ B_{y,h} \\ B_{z,h} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1/2 \\ 0 \\ 0 \\ 2.5 \\ B_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \rho_l \\ v_{x,l} \\ v_{y,l} \\ v_{z,l} \\ P_l \\ B_{x,l} \\ B_{y,l} \\ B_{z,l} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \\ 0 \\ 0 \\ 2.5 \\ B_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

Kelvin-Helmholtz 不安定性を誘起するため、渦板近傍の  $y$  方向の速度に以下のゆらぎを与える。

$$v_y = -0.125 \sin(kx) \left\{ \exp\left(-\frac{(y - 3/4)^2}{w^2}\right) + \exp\left(-\frac{(y - 1/4)^2}{w^2}\right) \right\}$$

波数を  $k = 4\pi$ 、ゆらぎを加える幅を  $w = 0.1$  とする。

## 初期条件の実装

SPH 粒子は全て等質量とする。したがって、渦板を境に密度がジャンプするので、粒子間隔が高密度ガスと低密度ガスで異なる。

## 可視化

- PlotType = 0: 密度分布 (左) と磁場強度分布 (右)。粒子位置に色のついた○を表示
- PlotType = 1: 密度分布 (左) と磁場強度分布 (右)。粒子データをグリッドにマップする。磁力線も表示。

## 実習

param.toml において変更可能なパラメータ

- [Mode]
  - NParticles:  $y$  方向に沿った粒子数を設定する (default 値は 256 で, 全粒子数は  $256 \times 256$  となる)。
- [IO]
  - OutDir: 出力ファイルを格納するディレクトリ名
  - RunName: 出力ファイルの接頭語
  - OutputFileNumber: 計算終了時刻 TEnd までに出力するファイル数。  
つまり, 時間間隔 TEnd/OutputFileNumber で出力される。
- [Time]
  - TEnd: 計算終了時間
- [Problem]
  - InitialFieldStrength: 初期磁場強度 ( $B_0$  のこと)

磁場強度  $B_0$  を徐々に大きくしていったとき, KH 不安定性の進化がどのように変わるのかを調べてみる。特に臨界磁場強度 (式 2.3 参照) 以上に設定した場合に, KH 不安定性が抑えられるのかどうかを調べる。

余力があれば, 時系列データ解析をしてみよう。src/Log.c の `Log(const double t)` は, リアルタイムで各種エネルギーを計算する関数である。KH 不安定性の成長を調べるために,  $y$  方向の運動エネルギーあるいは  $y$  方向の磁気エネルギーの総和も計算するように書き換えよう。この関数の冒頭に書いてあるように, 時系列データの出力ファイル名は Energy.dat である。gnuplot などを使って, これらのエネルギーの時間進化が初期磁場にどのように依存するのか図示してみる。

参考のために, Athena++でおこなった同様の計算の時系列データを /home/hydro00/mhdrt\_athena に置いている。ファイル名は kh\_B0.0.hst や kh\_B0.4.hst などである。B の次の数値が初期磁場強度を表す。gnuplot などを使って, SPMHD の結果と格子法の結果を比較してみよう。ただ, あくまで参考程度の比較である。完全に問題設定が同じではないので, どこまで合うべきかは議論が必要。

## 2.2.5 MHD Rayleigh-Taylor 不安定性

KH 不安定性と同様に、接触不連続面における不安定性である。図 2.5 のように、流体 1 ( $y < 0$ ) と流体 2 ( $y > 0$ ) の間に接触不連続面があり、 $-y$  方向に重力 (重力加速度の大きさ  $g$ ) が働いている状態を考える。成長率は

$$\Gamma^2 = gk \left( \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1 + \rho_2} \right) \quad (2.6)$$

となり、 $\rho_2 > \rho_1$  のときに不安定となる。つまり、軽いガスの上に重いガスが乗っている状態は不安定であり、重いガスが下に沈み、軽いガスが上に浮き上がる。KH 不安定性よりも成長率の波数依存性 ( $k$  に比例) が弱く、 $\Gamma$  は  $k^{1/2}$  に比例して増加する (Chandrasekhar, 1961)。

接触面に平行な磁場 (強度は  $B_0$ ) を加えると、成長率が以下のように修正される。

$$\Gamma^2 = gk \left( \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1 + \rho_2} - \frac{2B_0^2 k}{g(\rho_1 + \rho_2)} \right) \quad (2.7)$$

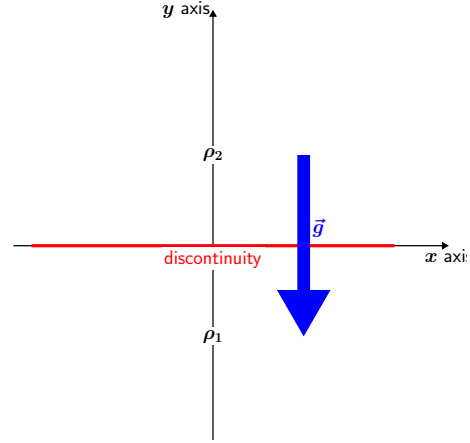


図 2.5: Rayleigh-Taylor 不安定性の問題設定

KH 不安定性とは異なり、 $\Gamma = 0$  を満たす臨界波数  $k_{\text{cri}}$  が定義でき、 $k > k_{\text{cri}}$  を満たす小スケールの揺らぎは磁気張力により安定化される。

### 問題設定

計算領域は  $0 \leq x \leq 1/4$ ,  $0 \leq y \leq 1$  とする。初期不連続面を  $y = 1/2$  に設定し、 $y > 1/2$  に高密度ガスを、 $y < 0.5$  に低密度ガスを配置する。 $y = 1/2$  での高密度ガスの密度を  $\rho_h = 2$ 、低密度ガスの密度を  $\rho_l = 1$  とする。エントロピーの指数を取った変数として  $A = P/\rho^\gamma$  を導入する。高密度ガスと低密度ガスのエントロピーがそれぞれ一定であると仮定し ( $A_h$  と  $A_l$ )、鉛直方向の静水圧平衡の式から、初期の密度分布と圧力分布を求める。

RT 不安定性を起こすために  $|y - 1/2| \leq \Delta L$  に以下のゆらぎを加える。

$$v_y(x, y) = \begin{cases} \frac{\delta v}{4} \left\{ 1 + \cos\left(\frac{2\pi x}{L_x}\right) \right\} \left\{ 1 + \cos\left(\frac{\pi}{\Delta L}(y - 1/2)\right) \right\} & \text{for } |y - 1/2| \leq \Delta L \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (2.8)$$

ゆらぎの大きさ  $\delta v$  は 0.1 とし、 $\Delta L$  は 0.2 とする。磁場は  $x$  成分にのみ入れる。

$$B_x(x, y) = B_0, \quad B_y(x, y) = 0, \quad B_z(x, y) = 0 \quad (2.9)$$

とする。

初期接触面での圧力  $P_0 = 10/7$  を使って、エントロピーは  $A_h = P_0/\rho_h^\gamma$  と  $A_l = P_0/\rho_l^\gamma$  と書ける。重力加速度の大きさは  $g = 0.5$  とする。摂動は初期不連続面を波数  $2\pi/L_x$  の波で揺らがせるように、 $v_y$  に入れる。 $A = 2.5 \times 10^{-3}$  は初期摂動の大きさを表す。

RT 不安定性をシミュレーションするためには、運動量保存式とエネルギー方程式に源泉項が必要である。重力加速度の大きさを  $g$  とし  $y$  負方向に重力をかけると、

$$\left(\frac{\partial \rho v_y}{\partial t}\right)_{\text{grav}} = -\rho g \quad (2.10)$$

$$\left(\frac{\partial E}{\partial t}\right)_{\text{grav}} = -\rho g v_y \quad (2.11)$$

となる。

## 初期条件の実装

ソースコード: `src/setup/SetupMHDRayleighTaylor.c`

SPH では、密度分布を実現するために、粒子の質量と配置の両方を決める必要がある。

他のテスト問題と同様に全ての SPH 粒子が等質量の場合、SPH 粒子を密度分布を実現するように配置する。逆の極限として、SPH 粒子を一定間隔の格子状に配置し、粒子の質量の方を密度分布を実現するように決めることもできる。今回のテスト問題では後者の方法を採用しているので、不連続面を介して、粒子の質量が大きく変動する問題設定となっている。

## 可視化

- `PlotType = 0`: 密度分布 (左) と磁場強度分布 (右)。粒子位置に色のついた○を表示
- `PlotType = 1`: 密度分布 (左) と磁場強度分布 (右)。粒子データをグリッドにマップする。磁力線も表示。

## 実習

param.toml において変更可能なパラメータ

- [Mode]
  - NParticles:  $y$  方向に沿った粒子数を設定する (default 値は 160 で, 全粒子数は  $40 \times 160$  となる)。
- [IO]
  - OutDir: 出力ファイルを格納するディレクトリ名
  - RunName: 出力ファイルの接頭語
  - OutputFileNumber: 計算終了時刻 TEnd までに出力するファイル数。  
つまり, 時間間隔 TEnd/OutputFileNumber で出力される。
- [Time]
  - TEnd: 計算終了時間
- [Problem]
  - InitialFieldStrength: 初期磁場強度 ( $B_0$  のこと)

磁場強度  $B_0$  を徐々に大きくしていったとき, RT 不安定性の進化がどのように変わるのかを調べてみる。結果を式 (2.6) と比較してみよう。式 (2.6) から, 波数を固定したときに, RT 不安定性が安定化する臨界の磁場強度が与えられる。その臨界磁場強度付近で RT 不安定性の振る舞いが変わるかどうか確認する。

## 2.2.6 星形成アウトフロー (回転している磁化した分子雲コアの重力収縮)

**この問題は計算時間がかかるので、他のテストをやった後の方がよい。**

星は、分子雲と呼ばれるガス雲の中で特に密度の濃い分子雲コアと呼ばれる領域が重力収縮することによって生まれる。このとき磁場の作用によってガスが噴出される現象 (開口角の大小によってアウトフローまたはジェットと呼ばれる) が起こることが知られている。このアウトフローは、周囲の分子雲に大きな影響を与えると共に、分子雲コアの一部を外に吹き飛ばすので、星の最終質量の決定に重要な役割を果たしている。このテスト問題では、分子雲コアの重力収縮を模擬し、アウトフローの噴出過程を調べる。

初めに分子雲コアの収縮過程について簡単に説明しよう。初期条件として一様なガス球を考える。重力収縮は密度の高い場所がより速く収縮するという性質があるため、重力収縮を開始すると中心領域が周囲を置き去りにして収縮し、中心集中した密度分布になる。

重力収縮の初期段階では、効率的な冷却によって重力収縮による圧縮加熱で生じる熱を外に逃がすことができ、ほぼ一定の温度で進化する (絶対温度 10 度, 対応する音速は  $0.2 \text{ km s}^{-1}$ )。十分収縮すると、冷却によって圧縮加熱を相殺できなくなったことによって高まった圧力によって収縮が止まる (実際にはこの後再度重力収縮をするが今回は説明を省く)。このときガスは回転しながら収縮している。角運動量の保存を考えると、遠心力は半径の 3 乗に反比例するので、収縮するに従い、遠心力の重力 (半径の 2 乗に反比例) に対する重要度は増し、収縮領域は扁平になっていく。

磁場が存在する場合、磁場が回転運動によって拗じられる。このときアウトフローの駆動機構は、初期磁場強度によって変わる。

- 磁場が弱い場合は、ガスの回転運動によって拗じられトロイダル (回転方向の) 磁場が増幅し、磁気圧勾配力によってアウトフローが噴出する。**磁気圧勾配風**と呼ばれる。
- 磁場が強い場合は、磁気張力によって、ガスの回転運動が制動される。磁場が針金のように振る舞い、ガスが回転する磁場に沿って振り回されて、外部へ吹き飛ばされる。**磁気遠心力風**と呼ばれる。

### 問題設定

初期条件として、一様磁場に貫かれた剛体回転する一様球 (半径:  $R_0$ , 質量:  $M_0$ , 磁場強度  $B_0$ , 回転角速度  $\Omega_0$ ) を考える。系を特徴づける量として、以下の各種エネルギー (熱エネルギー, 回転エネルギー, 磁気エネルギー, 重力エネルギー) を考える。

$$E_{\text{th}} = \frac{3}{2} M_0 c_s^2, \quad E_{\text{rot}} = \frac{1}{5} M_0 R_0^2 \Omega_0^2, \quad E_{\text{mag}} = \frac{4\pi R_0^3 B_0}{3 \cdot 8\pi}, \quad E_{\text{grv}} = -\frac{3}{5} \frac{GM_0^2}{R_0} \quad (2.12)$$

ここで、 $V_0 = 4\pi R_0^3/3$  は球の体積である。これらのエネルギーの比 ( $\alpha, \beta, \Gamma$ ) が系を特徴づける。

$$\alpha = \frac{E_{\text{th}}}{|E_{\text{grv}}|} = \frac{5R_0 c_s^2}{2GM_0} \rightarrow R_0 = \alpha \frac{2GM_0}{5c_s^2} = 0.0485 \text{ pc} \times \alpha \left( \frac{M}{M_\odot} \right) \quad (2.13)$$

$$\beta = \frac{E_{\text{rot}}}{|E_{\text{grv}}|} = \frac{R_0^3 \Omega_0^2}{3GM_0} \rightarrow \Omega_0 = \sqrt{\frac{\beta}{\alpha^3} \frac{375c_s^6}{8G^2 M_0^2}} = 3.44 \times 10^{-13} \text{ s}^{-1} \times \frac{\beta^{1/2}}{\alpha^{3/2}} \left( \frac{M}{M_\odot} \right)^{-1} \quad (2.14)$$

$$\Gamma = \frac{E_{\text{mag}}}{|E_{\text{grv}}|} = \frac{5B_0^2 R_0^4}{18GM_0^2} \rightarrow B_0 = \sqrt{\frac{1125}{8}} \frac{\Gamma^{1/2}}{\alpha^2} \frac{c_s^4}{G^{3/2} M_0} = 43.4 \mu\text{G} \times \frac{\gamma^{1/2}}{\alpha^2} \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{-1} \quad (2.15)$$

default の設定

- $M_0 = 1 M_\odot$
- $\alpha = 0.3 \rightarrow R_0 = 3.0 \times 10^3 \text{ au}$
- $\beta = 0.4 \rightarrow \Omega_0 = 2.2 \times 10^{-13} \text{ s}^{-1}$
- $\gamma = 0.001 \rightarrow B_0 = 15 \mu\text{G}$

密度と圧力の関係は以下の簡単なバロトロピック関係を使う。

$$P = \rho \sqrt{1 + \left(\frac{\rho}{\rho_{\text{cri}}}\right)^{4/3}} \quad (2.16)$$

$\rho_{\text{cri}}$  は断熱変化へと遷移する臨界の密度である。今回はなるべく計算時間を短くするように設定している。

## 無次元化

この系の特徴量は、密度  $\rho_0 = M_0/(4\pi R_0^3/3)$  と音速  $c_s$ ・重力定数  $G$  である。これら3つの量を使って導いた時間と長さ・質量・磁場強度の特徴量を以下に示す。

- 時間：  $t_u = 1/\sqrt{G\rho_0}$
- 長さ：  $L_u = c_s/\sqrt{G\rho_0}$
- 質量：  $M_u = \rho_0 L_u^3$
- 磁場強度：  $B_u = \sqrt{4\pi\rho_0}c_s$

これらの量を使って無次元化した分子雲コアの半径と回転角速度・磁場強度は以下になる。

$$\tilde{R}_0 = \sqrt{\frac{15}{8\pi\alpha}}, \quad \tilde{\Omega}_0 = 2\sqrt{\pi\beta}, \quad \tilde{B}_0 = \frac{\sqrt{3}\Gamma^{1/2}}{\alpha^{1/2}} \quad (2.17)$$

以降はチルダを省く。

## 初期条件の実装

計算領域は  $0 \leq x, y, z \leq 5$  とする。計算領域の中心  $(5/2, 5/2, 5/2)$  に、半径  $R_0$  の一様ガス球を置く。ガス球内部には、等質量の SPH 粒子をグラス状に配置する (ほぼ一定の各粒子間の距離を保ったランダムな配置)。重心の移動を極力抑えるため、 $x = 5/2$  と  $y = 5/2$ ・ $z = 5/2$  の3つの面に対して鏡面对称性を課す。初期条件に従って、各 SPH 粒子に剛体回転の速度と磁場を与える。

## 可視化

- PlotType = 0: 中心を通る平面  $y = 5/2$  での粒子分布 ( $|y_i - 5/2| \leq h_i$  を満たす粒子を表示し、左図では  $\log_{10} \rho$  で、右図では  $B_\phi$  で色付けしている。)

- PlotType = 1:  $y = 5/2$  平面に張ったグリッドに粒子データをマップした結果。左図は  $\log_{10} \rho$  を, 右図は  $B_\phi$  を示している。線はポロイダル磁場を使って引いた流線を, 矢印はポロイダル速度の方向を表す。

## 可視化

- PlotType = 0: 密度分布 (左) と  $\phi$  方向の磁場 (右)。粒子位置に色の付いた○を表示
- PlotType = 1: 密度分布 (左) と  $\phi$  方向の磁場 (右)。粒子データをグリッドにマップする。平面内の磁場の流線を表示。

## 実習

param.toml において変更可能なパラメータ

- [Mode]
  - NParticles: ダミー
  - ICFFile: 初期条件の粒子配置が入ったファイル。デフォルトは 3e5\_sphere.bin で粒子数が約 30 万個。6e5\_sphere.bin にすると, 約 60 万個になる。NParticles を変える必要はない。
- [IO]
  - OutDir: 出力ファイルを格納するディレクトリ名
  - RunName: 出力ファイルの接頭語
  - OutputFileNumber: 計算終了時刻 TEnd までに出力するファイル数。つまり, 時間間隔 TEnd/OutputFileNumber で出力される。
- [Time]
  - TEnd: 計算終了時間
- [Hydro]
  - FacSrcTermDivB: 計算が壊れる場合は 1 にしてみる。
- [Problem]
  - Eth2Egrv:  $\alpha$  のこと
  - Erot2Egrv:  $\beta$  のこと
  - Emag2Egrv:  $\Gamma$  のこと

特に磁場強度 Emag2Egrv を変えて計算し, アウトフローの構造がどう変わるか見てみる。

## 付録 A 粒子データへの格子へのマップ

$$Q_{\alpha,\beta} = \left( \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} W(\mathbf{x}_{\alpha,\beta} - \mathbf{x}_j, h_j) \right)^{-1} \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} Q_j W(\mathbf{x}_{\alpha,\beta} - \mathbf{x}_j, h_j) \quad (\text{A.1})$$

## 関連図書

Chandrasekhar, S. (1961). *Hydrodynamic and hydromagnetic stability*.

Inutsuka, S.-I. (2002). Reformulation of Smoothed Particle Hydrodynamics with Riemann Solver. *Journal of Computational Physics*, 179(1):238–267.

Iwasaki, K. and Inutsuka, S.-I. (2011). Smoothed particle magnetohydrodynamics with a Riemann solver and the method of characteristics. *MNRAS*, 418(3):1668–1688.

Londrillo, P. and Del Zanna, L. (2000). High-Order Upwind Schemes for Multidimensional Magnetohydrodynamics. *ApJ*, 530(1):508–524.

Orszag, S. A. and Tang, C. M. (1979). Small-scale structure of two-dimensional magnetohydrodynamic turbulence. *Journal of Fluid Mechanics*, 90:129–143.