

流体学校

3日目講義その1

輻射輸送

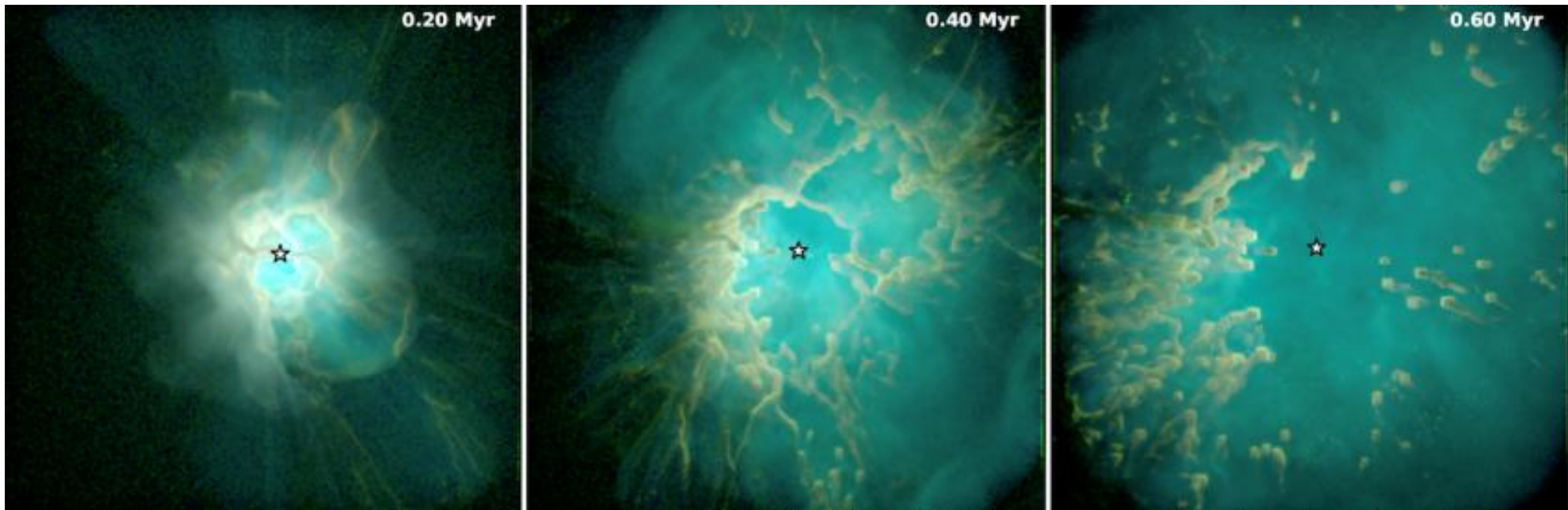
鹿児島大学 塚本裕介

参考文献:

Whitehouse & Bate 2014, 2015 MNRAS FLD-SPH
Kessel-Deynet & Burkert 2000, MNRAS ray-tracing SPH
Hasegawa+ 2021 MNRAS tree-ray-tracing SPH

輻射流体力学とは

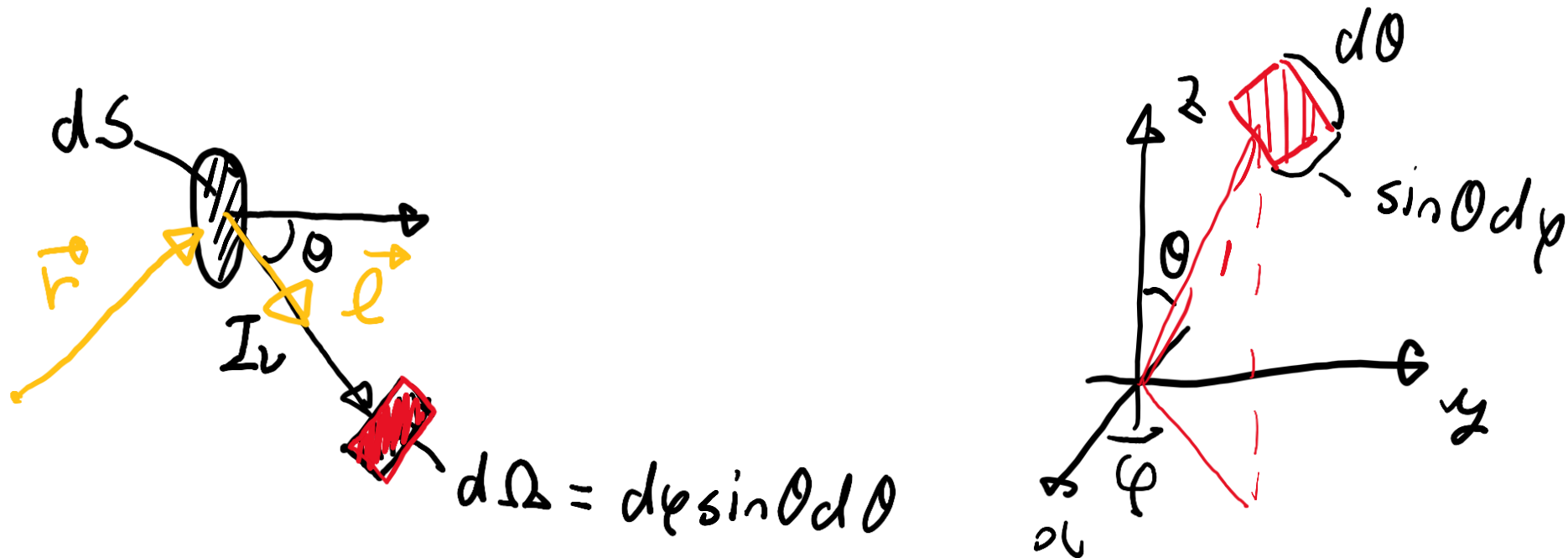
- 輻射輸送→光の放射、吸収、伝搬を扱う物理
- 宇宙では物質は基本的に光を放射したり吸収して温度が決まる
→ガスの温度を決めるためには「輻射」流体力学が不可欠
- 強い光の下では「輻射圧」を受ける
→強輻射場での運動を決めるためにも「輻射」流体力学が不可欠



輝度とそのモーメント量

- 輻射輸送でもっと基本的な物理量は輝度
 - 1平方cmあたり1秒間あたり1srの立体角を通り抜ける光のエネルギー
- ※立体角とは半径1の球面の微小面積

$$I_\nu(x, y, z, \theta, \varphi) \text{ もしくは } I_\nu(\mathbf{r}, \mathbf{l}) [\text{erg s}^{-1} \text{ cm}^{-2} \text{ sr}^{-1} \text{ Hz}^{-1}]$$



輝度とそのモーメント量

- 輝度に方向ベクトルをかけて立体角で積分したものをモーメント量という
- とりあえず2次モーメントまで知っていればよい
 - 0次モーメント: 輻射エネルギー密度 $E_\nu [\text{erg cm}^{-3} \text{ Hz}^{-1}]$
 - 1次モーメント: 輻射流束 $F_\nu^a [\text{erg s}^{-1} \text{ cm}^{-2} \text{ Hz}^{-1}]$
 - 2次モーメント: 輻射圧 $P_\nu^{ab} [\text{erg cm}^{-3} \text{ Hz}^{-1}]$

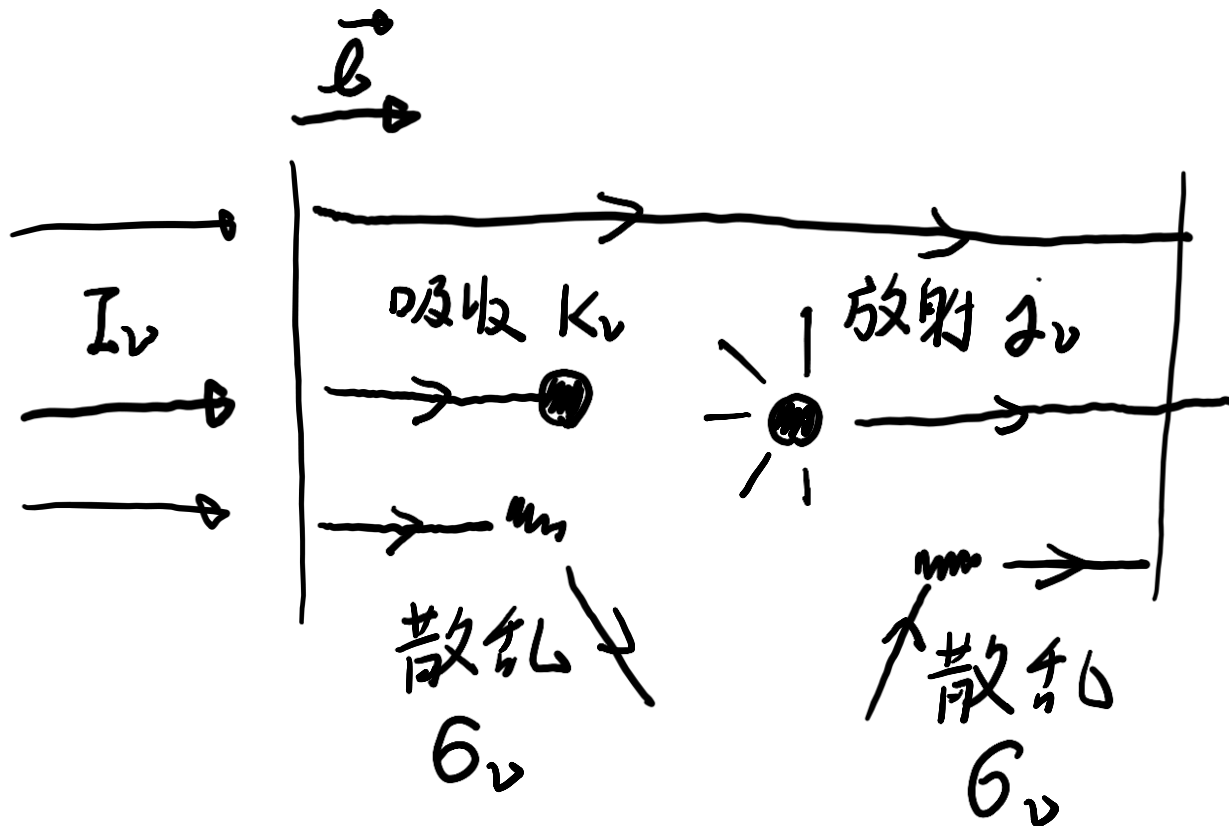
$$E_\nu = \frac{1}{c} \int I_\nu d\Omega, \quad F_\nu^a = \int I_\nu l^a d\Omega, \quad P_\nu^{ab} = \frac{1}{c} \int I_\nu l^a l^b d\Omega$$

- ここで l^a は光の方向ベクトルのa成分($a=x,y,z$)
- 輻射流束はベクトル、輻射圧は2階テンソル

輻射輸送方程式

- 時間に依存する輻射輸送方程式(等方散乱を仮定)

$$\frac{1}{c} \frac{\partial I_\nu}{\partial t} + l^a \frac{\partial I_\nu}{\partial x^a} = \frac{j_\nu}{4\pi} \rho - \rho(k_\nu + \sigma_\nu) + \rho \sigma_\nu \frac{c}{4\pi} E_\nu$$



輻射輸送方程式のモーメント

- 輻射輸送方程式の両辺に方向ベクトルをかけて立体角積分すると輻射輸送方程式のモーメント式が得られる

$$\frac{\partial E_\nu}{\partial t} + \frac{\partial F_\nu^a}{\partial x^a} = \rho(j_\nu - c\kappa_\nu E_\nu) \quad (0\text{次モーメント})$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial F_\nu^a}{\partial t} + \frac{\partial P_\nu^{ab}}{\partial x^b} = -\frac{\rho(\kappa_\nu + \sigma_\nu)}{c} F_\nu^a \quad (1\text{次モーメント})$$

- n次の方程式にn+1次のモーメント量が現れることに注目
→ えんえんやっても未知数が(方程式の数+1)個で解けない
→ クロージャー問題

エディントン近似

- クロージャー関係の例として、輝度が等方(か一次の非等方まで)の場合を考える

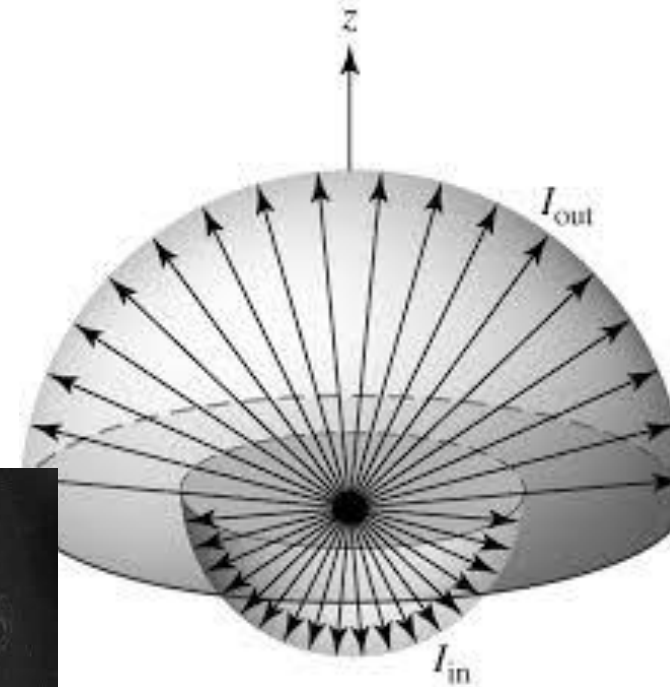
$$l_\nu(r, \theta, \varphi) = I_\nu(r)$$

$$P_\nu^{ab} = \frac{1}{c} \int I_\nu l^a l^b d\Omega = \frac{1}{3} \delta^{ab} E_\nu$$

- この関係を「エディントン近似」という
- より一般に非等方な輝度分布に対しては

$$P_\nu^{ab} = \int I_\nu l^a l^b d\Omega = \frac{1}{3} f^{ab} E_\nu$$

とエディントンテンソル(またはエディントンファクター)を導入して輻射の非等方性を表現する



エディントン近似での輻射流束

- エディントン近似のもとでは

$$P_\nu^{ab} = \frac{1}{3} \delta^{ab} E_\nu (= \delta^{ab} \frac{4\pi}{3c} B_\nu(T) \text{ (LTEならば)})$$

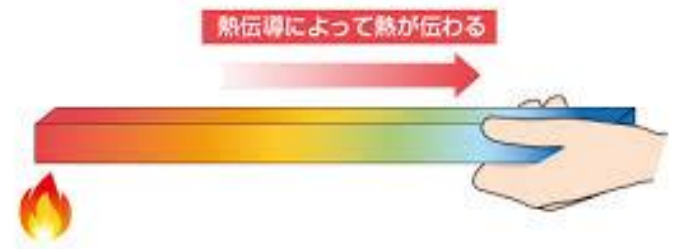
- この時、定常状態(時間微分項無視)の輻射流束は

$$\cancel{\frac{1}{c^2} \frac{\partial P_\nu^{ab}}{\partial t}} + \frac{\partial P_\nu^{ab}}{\partial x^b} = - \frac{\rho(\kappa_\nu + \sigma_\nu)}{c} F_\nu^a$$

$$F_\nu^a = - \frac{c}{\rho(\kappa_\nu + \sigma_\nu)} \frac{\partial P_\nu^{ab}}{\partial x^b} = - \frac{c}{3} \frac{\partial E_\nu}{\partial \tau_\nu^a}$$

ベクトル表示

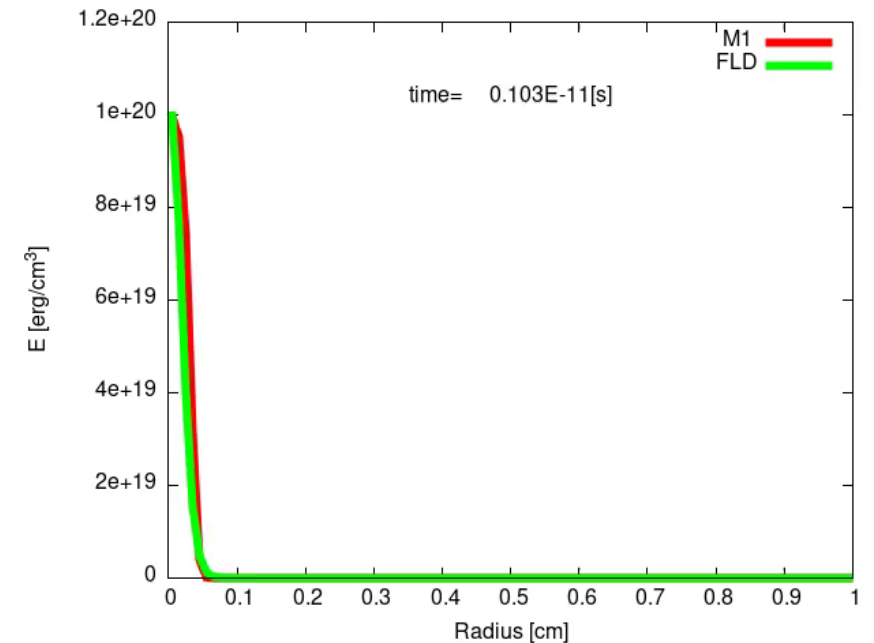
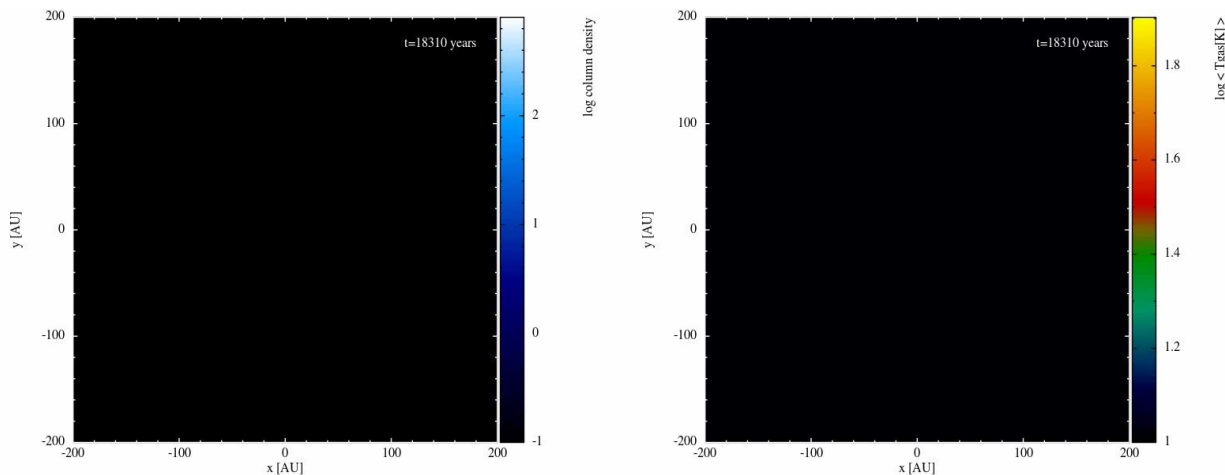
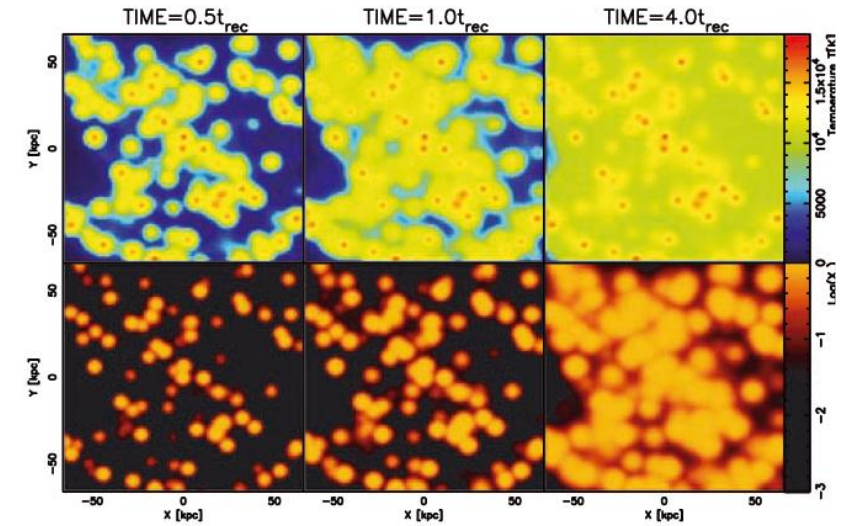
$$\mathbf{F}_\nu = - \frac{c}{\rho(\kappa_\nu + \sigma_\nu)} \nabla \cdot \mathbf{P} = - \frac{c}{3\rho(\kappa_\nu + \sigma_\nu)} \nabla E_\nu$$



すなわち、エネルギー勾配の方向に速さ $c/3\tau_\nu$ で輻射エネルギーが運ばれる → 熱伝導方程式(フィック則)と同様の形

輻射輸送の数値解法

- モーメント方程式を解く (モーメント法)
 - Flux limited diffusion法
 - M1 closure法
 - Variable Edington factor法
- 輻射輸送方程式を直に解く (直接法)
 - レイトレーシング



Flux limited diffusion (FLD)法

- エディントン近似のもとでは、以下が成り立つ

$$F_\nu^a = -\frac{c}{\rho(\kappa_\nu + \sigma_\nu)} \frac{\partial P_\nu^{ab}}{\partial x^a} = -\frac{c}{3\rho(\kappa_\nu + \sigma_\nu)} \frac{\partial E_\nu}{\partial x^a} \quad \frac{\partial E_\nu}{\partial t} + \frac{\partial F_\nu^a}{\partial x^a} = \rho(j_\nu - c\kappa_\nu E_\nu)$$

$$\therefore \frac{\partial E_\nu}{\partial t} - \nabla \cdot \left(\frac{c}{3\rho(\kappa_\nu + \sigma_\nu)} \nabla E_\nu \right) = \rho(j_\nu - c\kappa_\nu E_\nu)$$

- 輻射エネルギーに関して閉じた方程式が得られた!
 - 光学的に厚い ($\kappa_\nu + \sigma_\nu \gg 1$) ときはよい近似
 - 光学的に薄い ($\kappa_\nu + \sigma_\nu \ll 1$) ときは?
- エネルギー輸送の速さ

$$\frac{c}{3\tau_\nu} \rightarrow \infty \quad d\tau_\nu = \rho(\kappa_\nu + \sigma_\nu) dx^a$$

エネルギー伝達が光速を超える



Flux limited diffusion (FLD)法

- 光速を超えないように流束制限因子(flux limiter)を導入する

$$F_\nu^a = -\frac{c}{\rho(\kappa_\nu + \sigma_\nu)} \frac{\partial P_\nu^{ab}}{\partial x^a} = -\frac{\lambda_\nu c}{\rho(\kappa_\nu + \sigma_\nu)} \frac{\partial E_\nu}{\partial x^a} \frac{\partial E_\nu}{\partial t} + \frac{\partial F_\nu^a}{\partial x^a} = \rho(j_\nu - c\kappa_\nu E_\nu)$$

$$\therefore \frac{\partial E_\nu}{\partial t} - \nabla \cdot \left(\frac{\lambda_\nu c}{\rho(\kappa_\nu + \sigma_\nu)} \nabla E_\nu \right) = \rho(j_\nu - c\kappa_\nu E_\nu)$$

- Flux limiterが持つべき性質

- 光学的に厚い極限でエディントン近似になる

$$\lambda_\nu \rightarrow \frac{1}{3}$$

- 光学的に薄い極限で拡散速度が光速に漸近するようにとる

$$\lambda_\nu \propto d\tau_\nu = \rho(\kappa_\nu + \sigma_\nu) dx^a$$



Flux limited diffusion (FLD)法

- 光速を超えないように流束制限因子(flux limiter)を導入する

$$F_\nu^a = -\frac{c}{\rho(\kappa_\nu + \sigma_\nu)} \frac{\partial P_\nu^{ab}}{\partial x^a} = -\frac{\lambda_\nu c}{\rho(\kappa_\nu + \sigma_\nu)} \frac{\partial E_\nu}{\partial x^a} \frac{\partial E_\nu}{\partial t} + \frac{\partial F_\nu^a}{\partial x^a} = \rho(j_\nu - c\kappa_\nu E_\nu)$$

$$\therefore \frac{\partial E_\nu}{\partial t} - \nabla \cdot \left(\frac{\lambda_\nu c}{\rho(\kappa_\nu + \sigma_\nu)} \nabla E_\nu \right) = \rho(j_\nu - c\kappa_\nu E_\nu)$$

- よく使われるflux limiter (Levermore and Pomraning 1981)

$$R_\nu = \frac{|\nabla E_\nu|}{(\kappa_\nu + \sigma_\nu) \rho E_\nu}$$

$$\mathbf{f} = \frac{1}{2} (1 - f) \mathbf{I} + \frac{1}{2} (3f - 1) \mathbf{n} \mathbf{n}$$

$$\lambda_\nu = \frac{2 + R_\nu}{6 + 3R_\nu + R_\nu^2}$$

$$f = \lambda_\nu + \lambda_\nu^2 R_\nu^2$$

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla E}{|\nabla E|}$$



FLD for SPH

- SPH法に対するFLDの実装はWhitehouse & Bate (2004;陽解法), (2005;陰解法)によって提案された
- 基礎方程式

圧力勾配

輻射圧

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla p + \frac{\chi_F \rho}{c} \mathbf{F},$$

輻射エネルギー輸送

$$\rho \frac{D}{Dt} \left(\frac{E}{\rho} \right) = -\nabla \cdot \mathbf{F} - \nabla \mathbf{v} : \mathbf{P} + 4\pi\kappa_P \rho B - c\kappa_E \rho E,$$

輻射圧仕事

物質と輻射のエネルギーやりとり

圧縮仕事

$$\rho \frac{D}{Dt} \left(\frac{e}{\rho} \right) = -p \nabla \cdot \mathbf{v} - 4\pi\kappa_P \rho B + c\kappa_E \rho E,$$

FLD for SPH

- SPH法に対するFLDの実装はWhitehouse & Bate (2004;陽解法), (2005;陰解法)によって提案された
- SPH離散化

$$\begin{aligned}
 \frac{D\mathbf{v}_i}{Dt} &= -\sum_{j=1}^N m_j \left(\frac{p_i}{\rho_i^2} + \frac{p_j}{\rho_j^2} + \Pi_{ij} \right) \nabla W(r_{ij}, h_{ij}) - \frac{\lambda_i}{\rho_i} \sum_{j=1}^N m_j \xi_j \nabla W(r_{ij}, h_{ij}), \\
 \frac{D\xi_i}{Dt} &= -(\nabla \cdot \mathbf{v})_i f_i \xi_i + \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_i \rho_j} c \left[\frac{4 \frac{\lambda_i}{\kappa_i \rho_i} \frac{\lambda_j}{\kappa_j \rho_j}}{\left(\frac{\lambda_i}{\kappa_i \rho_i} + \frac{\lambda_j}{\kappa_j \rho_j} \right)} \right] (\rho_i \xi_i - \rho_j \xi_j) \frac{\nabla W_{ij}}{r_{ij}} - a c \kappa_i \left[\frac{\rho_i \xi_i}{a} - \left(\frac{u_i}{c_{v,i}} \right)^4 \right], \\
 \frac{Du_i}{Dt} &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \left(\frac{p_i}{\rho_i^2} + \frac{p_j}{\rho_j^2} + \Pi_{ij} \right) m_j \mathbf{v}_{ij} \cdot \nabla W_{ij} + a c \kappa_i \left[\frac{\rho_i \xi_i}{a} - \left(\frac{u_i}{c_{v,i}} \right)^4 \right],
 \end{aligned}$$

$\xi = E/\rho$ $u = e/\rho$

FLD for SPH

- 輻射の拡散項だけ若干トリッキー (Cleary Monaghan 99の離散化による)

$$\frac{D\xi_i}{Dt} = -(\nabla \cdot \mathbf{v})_i f_i \xi_i + \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_i \rho_j} c \left[\frac{4 \frac{\lambda_i}{\kappa_i \rho_i} \frac{\lambda_j}{\kappa_j \rho_j}}{\left(\frac{\lambda_i}{\kappa_i \rho_i} + \frac{\lambda_j}{\kappa_j \rho_j} \right)} \right] (\rho_i \xi_i - \rho_j \xi_j) \frac{\nabla W_{ij}}{r_{ij}}.$$

$$\frac{D\xi}{Dt} = -\frac{\nabla \cdot \mathbf{F}}{\rho} = \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \left(\frac{c\lambda}{\kappa\rho} \nabla E \right).$$



$$\left(\frac{D\xi_i}{Dt} \right)_{\text{flux}} = \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_i \rho_j} c \left[\frac{4 \frac{\lambda_i}{\kappa_i \rho_i} \frac{\lambda_j}{\kappa_j \rho_j}}{\left(\frac{\lambda_i}{\kappa_i \rho_i} + \frac{\lambda_j}{\kappa_j \rho_j} \right)} \right] (\rho_i \xi_i - \rho_j \xi_j) \frac{\nabla W_{ij}}{r_{ij}}.$$



$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{\rho} \nabla \cdot (k \nabla T_m),$$



$$\frac{du_i}{dt} = \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_i \rho_j} \left(\frac{4k_i k_j}{k_i + k_j} \right) (T_i - T_j) \frac{\nabla W_{ij}}{r_{ij}},$$

輻射輸送の難しさ

- 輻射輸送の難しさは「光速が速い」こと
→ 時間刻みが小さくなる

$$dt_{\text{rad},i} = \zeta \frac{h_i^2 \rho_i \kappa_i}{c \lambda_i} \cdot \frac{c_s}{c} \sim 10^{-6} ! (@10\text{K})$$

→ 1ステップが100万ステップ必要に!

- 陰的解法(t+dtの物理量で時間発展)やsuper timestepping (STS)法、光速を人為的に小さくする方法など時間刻みの制約を緩める方法が提案された
 - Whitehouse & Bate 2005 → 陰解法
 - Commercon et al 2011 → STS for FLD

陰解法

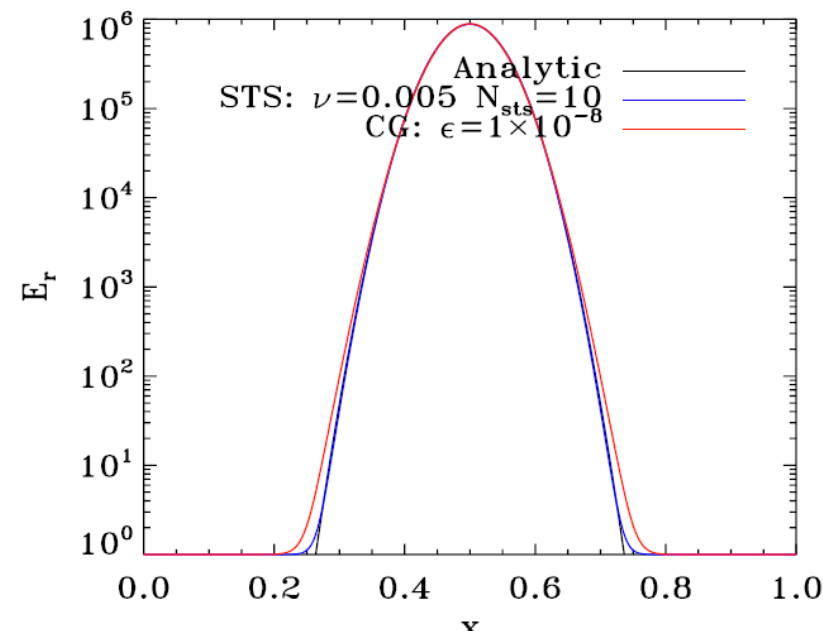
$$A_i^{n+1} = A_i^n + dt \left(\frac{dA_i}{dt} \right)^{n+1}$$

$$u_i^{n+1} = u_i^n + dt \sum_j \frac{1}{2} m_j \mathbf{v}_{ij} \cdot \nabla W_{ij}$$

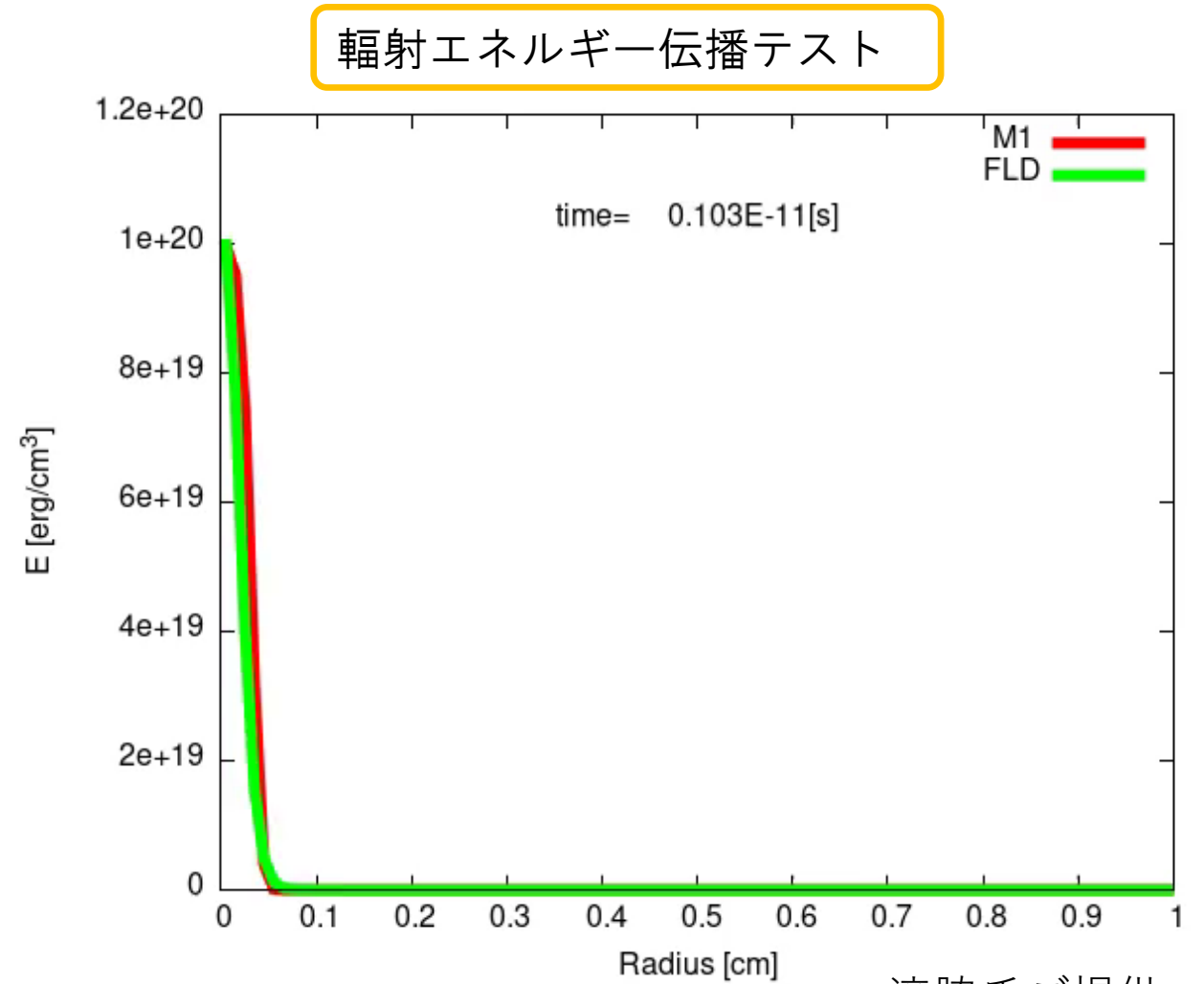
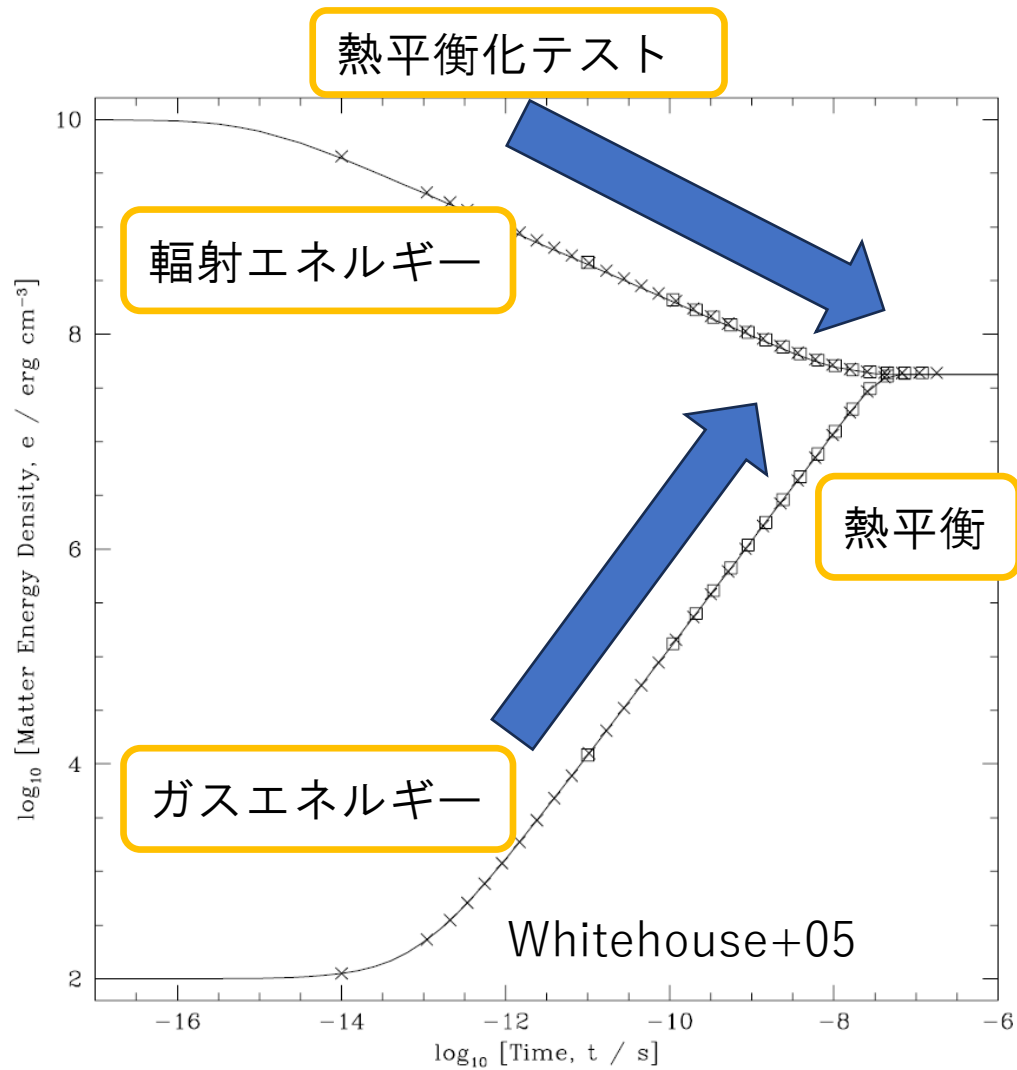
$$\nabla W_{ij} \left[\frac{u_i^{n+1} (\gamma - 1)}{\rho_i} + \frac{u_j^{n+1} (\gamma - 1)}{\rho_j} + \Pi_{ij} \right]$$

STS法

Commercon+11



テスト計算



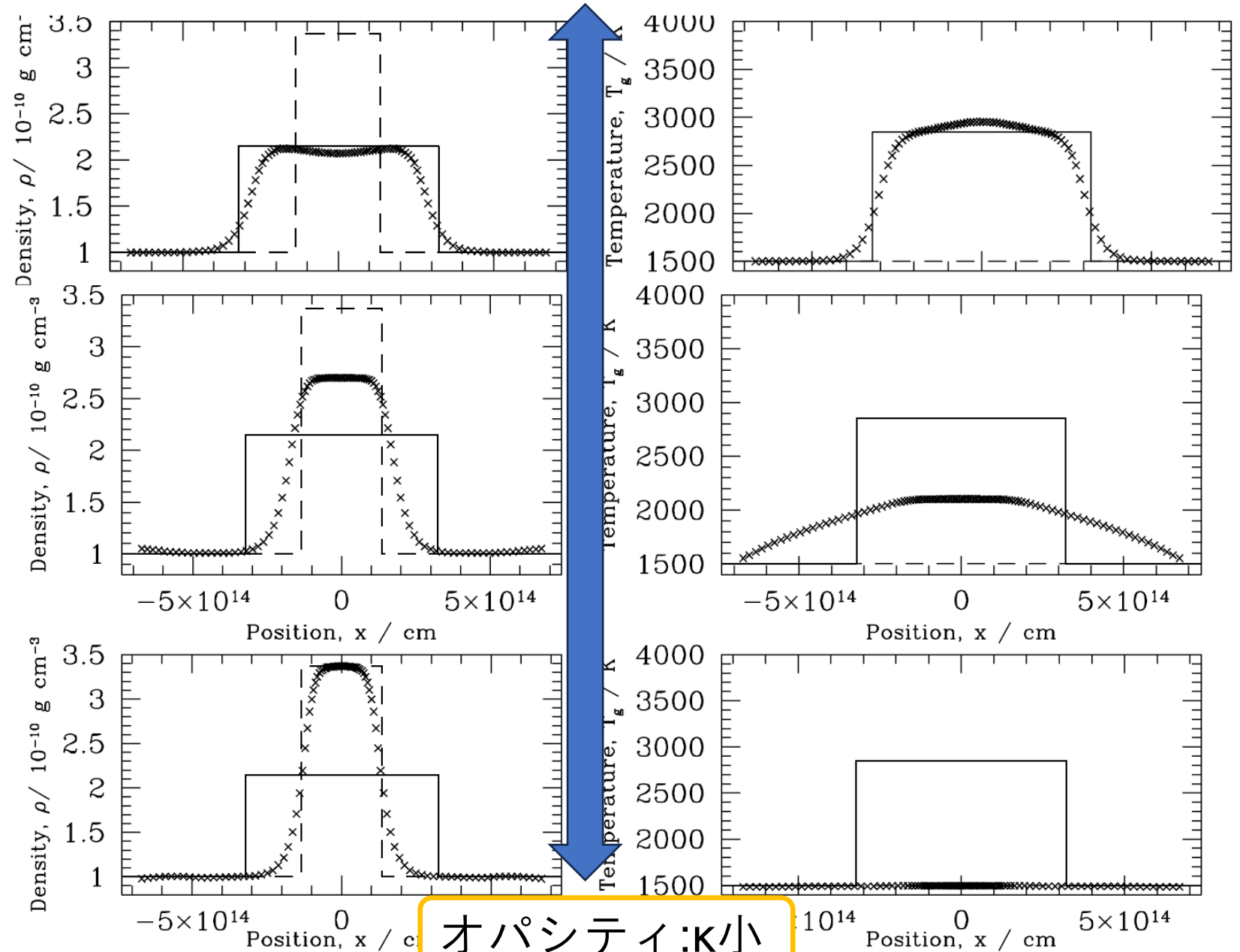
滝脇氏ご提供

テスト計算

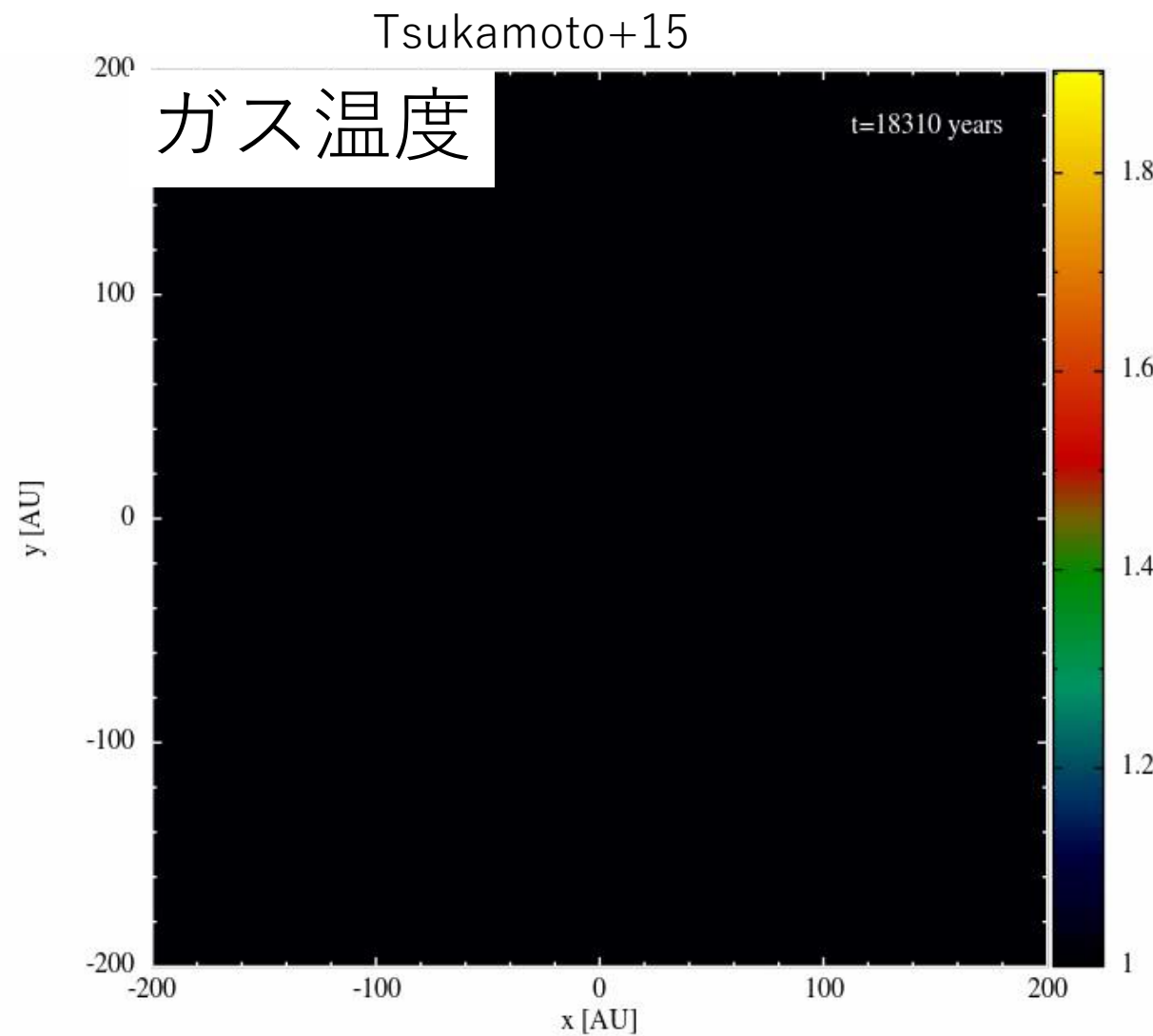
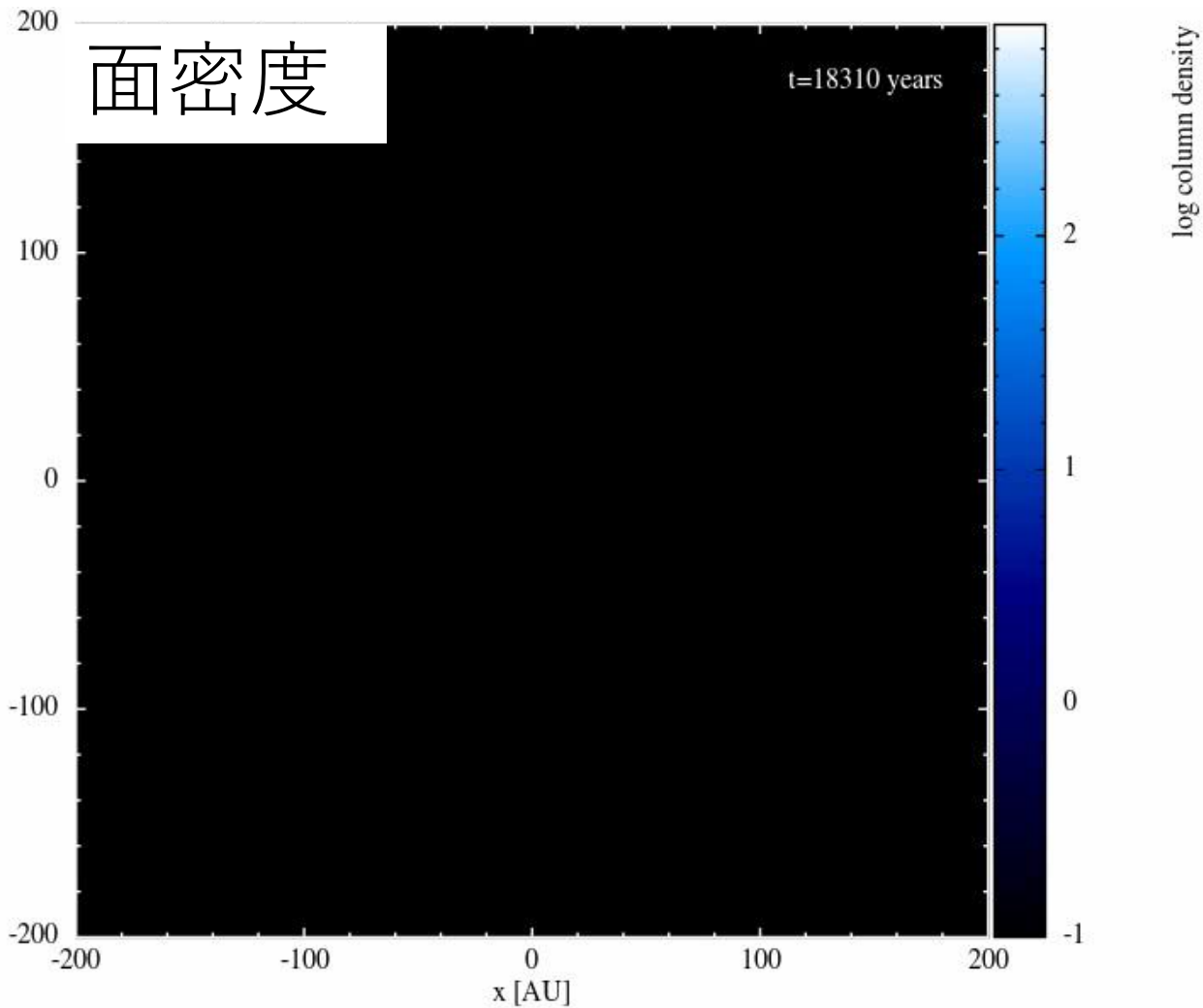
- オパシテイが減少
- 輻射によるエネルギー拡散
- 断熱衝撃波から等温衝撃波に連続的に遷移

オパシテイ:K大

Whitehouse & Bate04



科学計算の例 : 原始惑星系円盤の形成と分裂



FLDの問題点

- FLDではエネルギーは勾配の方向に流れる
→光線の直進性をうまく表現できない

- 輻射流束の方向を用いればよいのでは？

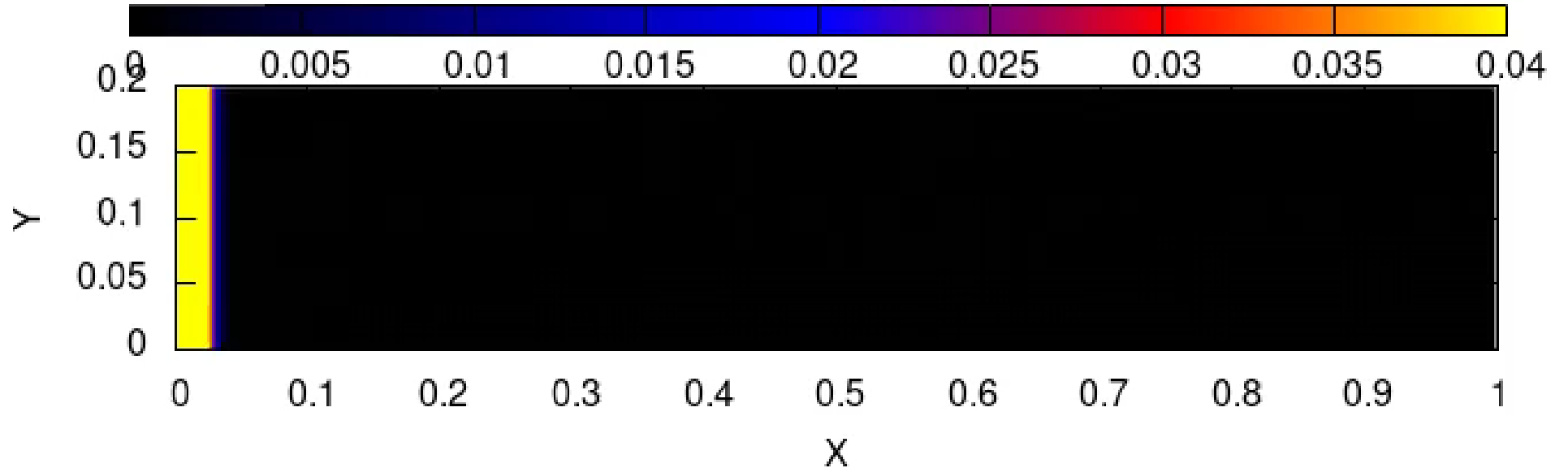
→そのためには、輻射流束の方程式(1次モーメント式)までを解く必要がある。

→M1 closure法

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla E}{|\nabla E|}$$

滝脇氏ご提供

0.100E-11



M1 closure

- 輻射輸送方程式の1次モーメント式まで連立して解く

$$\frac{\partial E_\nu}{\partial t} + \frac{\partial F_\nu^a}{\partial x^a} = \rho(j_\nu - c\kappa_\nu E_\nu) \quad (0\text{次モーメント})$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial F_\nu^a}{\partial t} + \frac{\partial P_\nu^{ab}}{\partial x^b} = -\frac{\rho(\kappa_\nu + \sigma_\nu)}{c} F_\nu^a \quad (1\text{次モーメント})$$

- よく使われるM1 closure (Levermore and Pomraning 1981)

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{F}_\nu}{|\mathbf{F}_\nu|} \quad \mathbf{f} = \frac{1}{2}(1-f)\mathbf{I} + \frac{1}{2}(3f-1)\mathbf{nn}$$

$$\xi_\nu = \frac{|\mathbf{F}_\nu|}{cE_\nu} \quad f = 3 + \frac{3 + 4\xi_\nu^2}{5 + 2\sqrt{4 - 3\xi_\nu^2}}$$

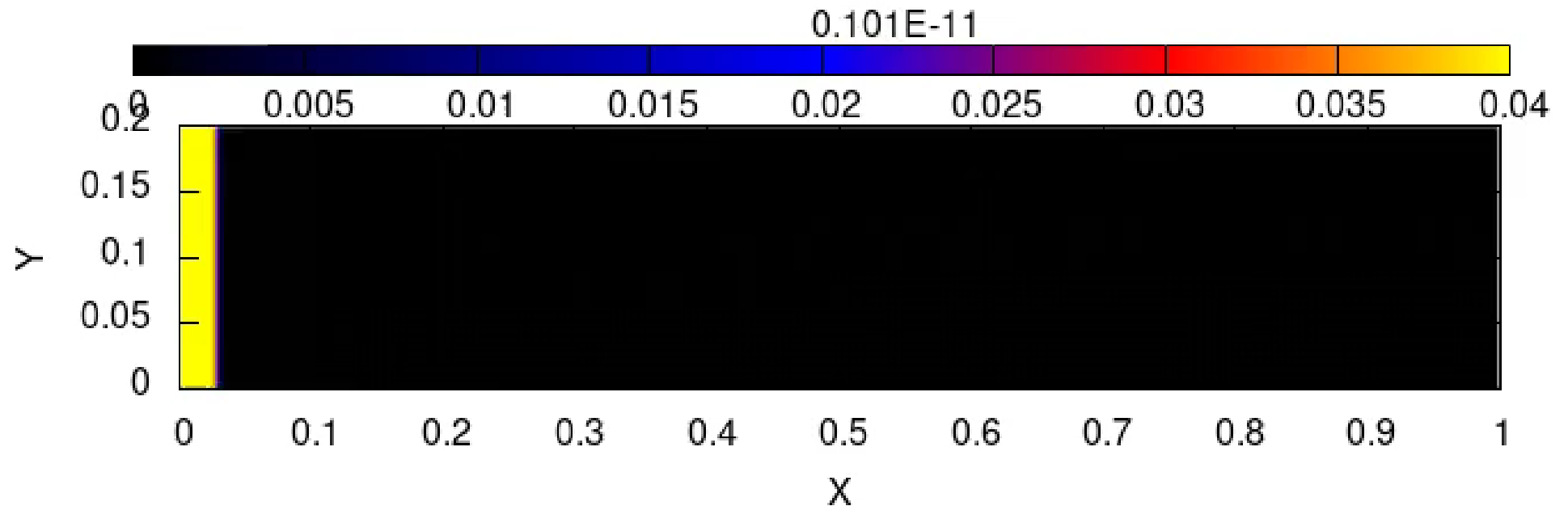
M1 closure

- 輻射輸送方程式の1次モーメント式まで連立して解く

$$\frac{\partial E_\nu}{\partial t} + \frac{\partial F_\nu^a}{\partial x^a} = \rho(j_\nu - c\kappa_\nu E_\nu) \quad (0\text{次モーメント})$$

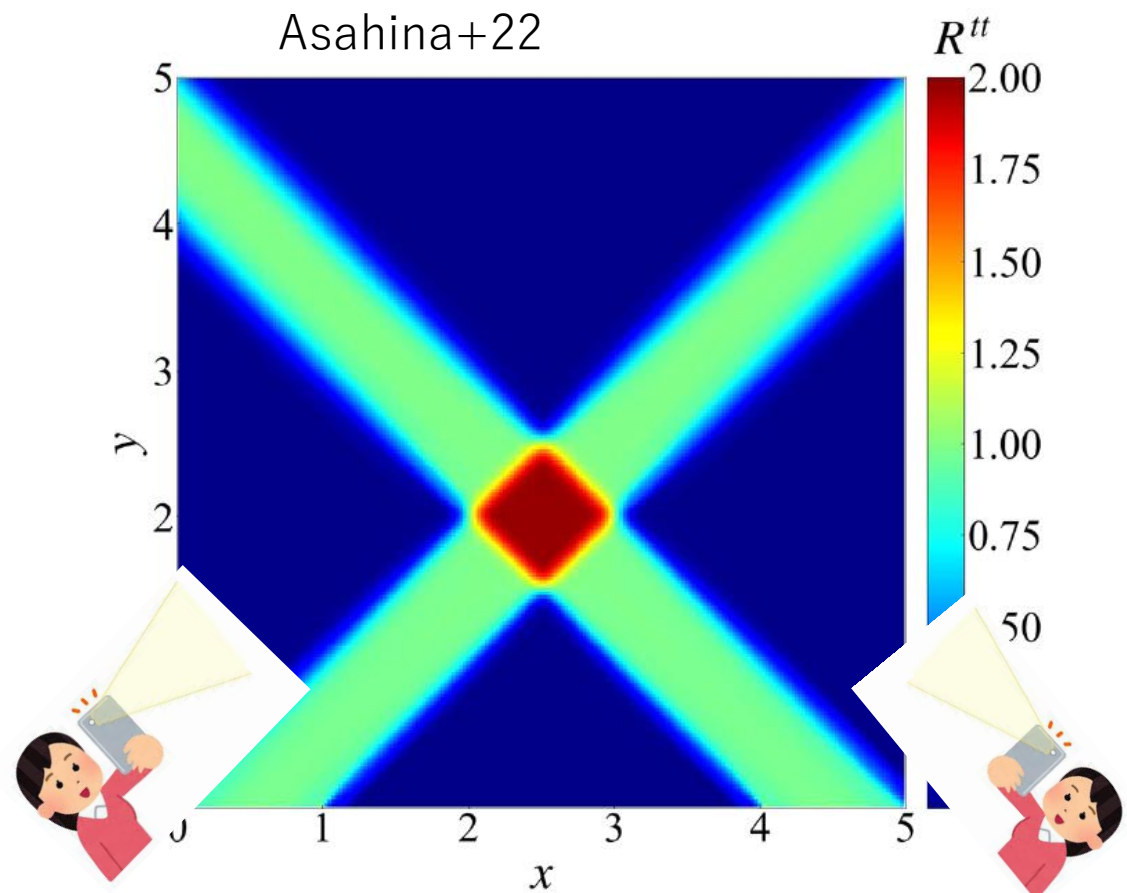
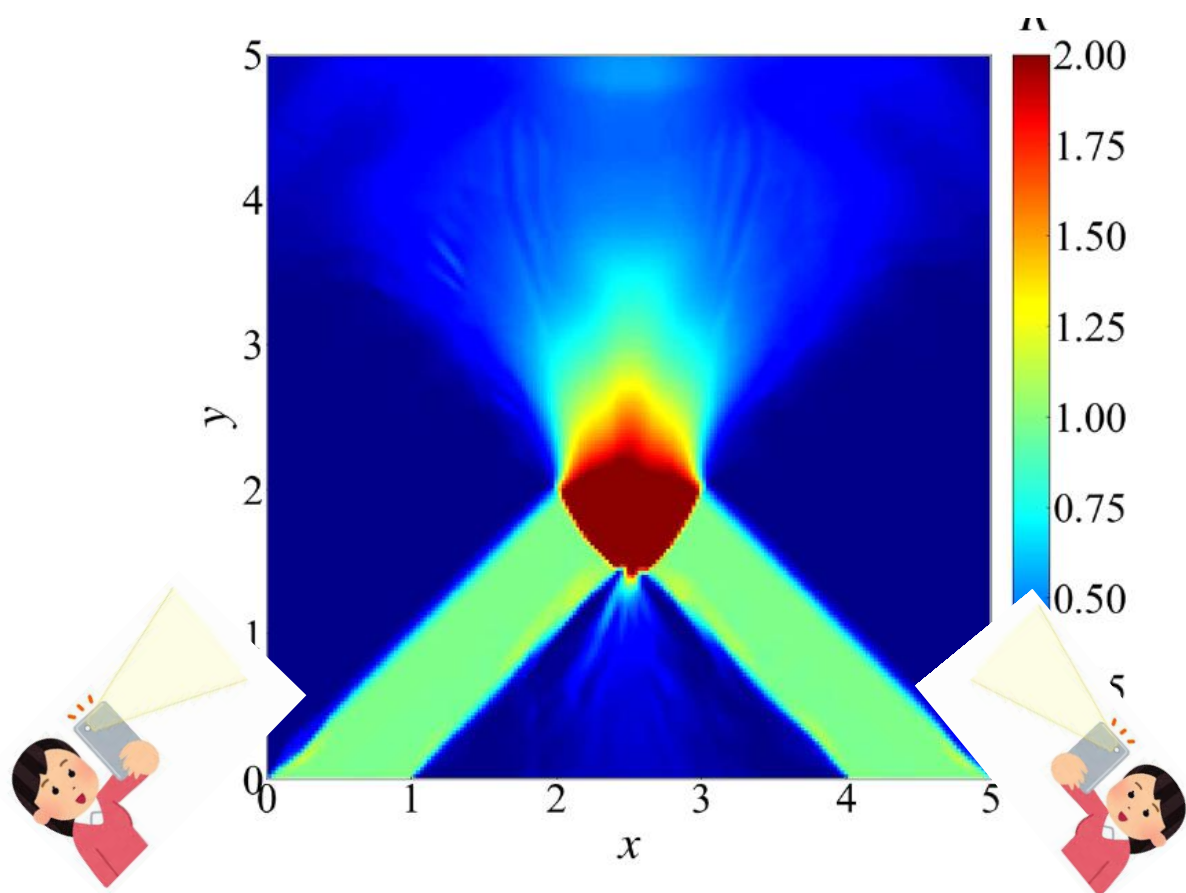
$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial F_\nu^a}{\partial t} + \frac{\partial P_\nu^{ab}}{\partial x^b} = -\frac{\rho(\kappa_\nu + \sigma_\nu)}{c} F_\nu^a \quad (1\text{次モーメント})$$

滝脇氏ご提供



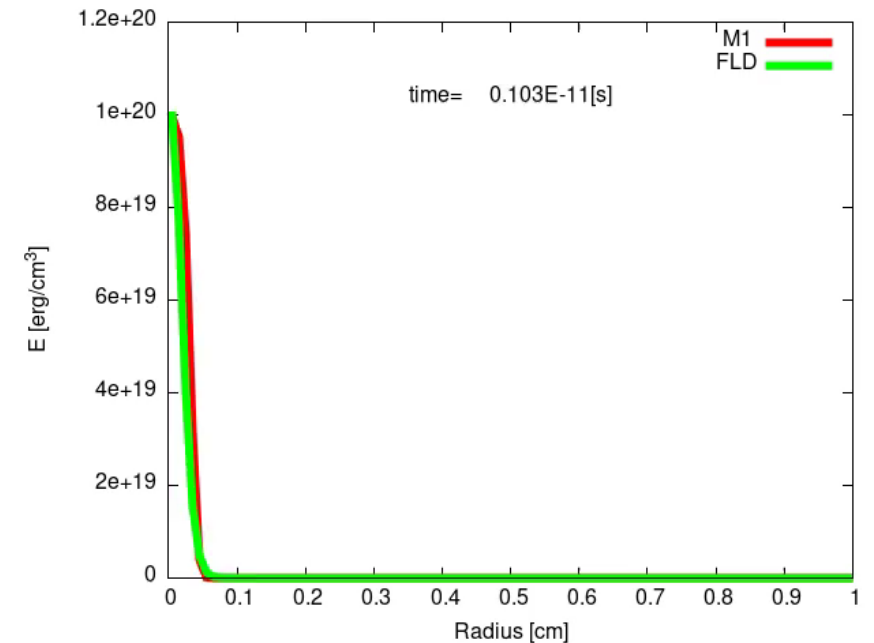
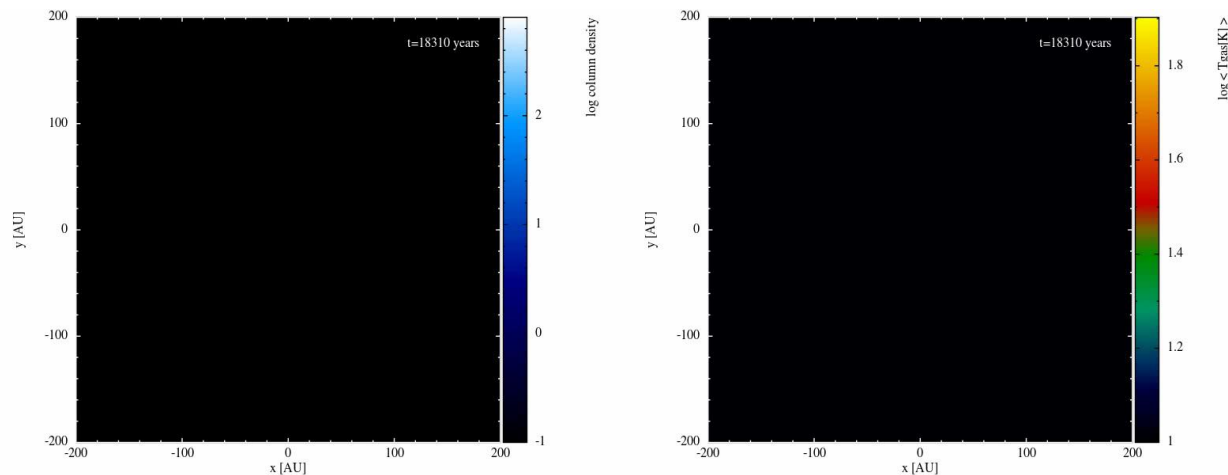
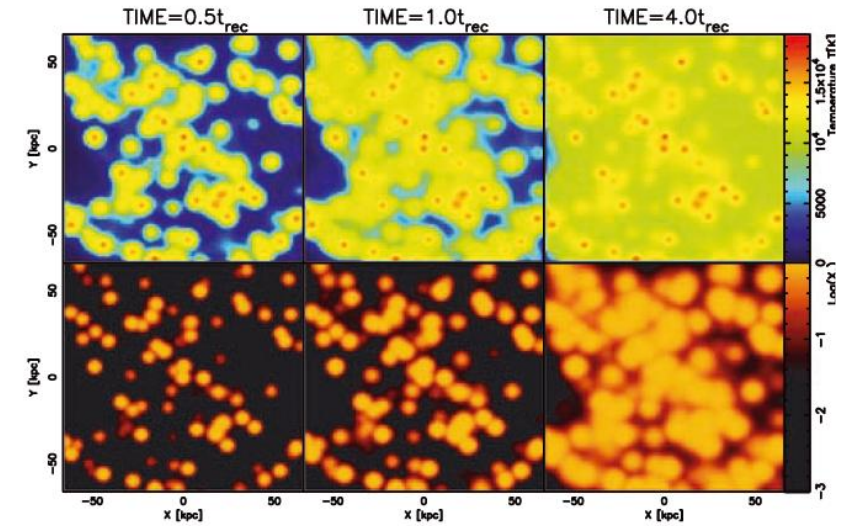
M1 closureの課題

- 輻射をベクトルで代表させるため、光線が交差する場合に光がぶつかる
→連星系とかでは光がぶつかって問題になる
→解決にはVariable Edington Factor法
- 陰解法が複雑かつ困難になる。
- そもそもM1もVEF法もSPHの実装提案はまだないのでモーメント法はこれくらいにする。



輻射輸送の数値解法

- モーメント方程式を解く (モーメント法)
 - Flux limited diffusion法
 - M1 closure法
 - Variable Edington factor法
- 輻射輸送方程式を直に解く (直接法)
 - レイトレーシング



Ray tracing法

- 輻射輸送計算の課題→時間刻みが小さい
 - 裏を返すと、輻射現象の時間スケールは短く、多くの場合すみやかに定常解に達する
- SPHで解くような問題で輻射場は定常解でよいことが多い。
- 定常な輻射輸送方程式を直接解く方法のほうが良いこともある。
- Ray tracing 法

$$\cancel{\frac{1}{c} \frac{\partial I_\nu}{\partial t}} + l^a \frac{\partial I_\nu}{\partial x^a} = \frac{j_\nu}{4\pi} \rho - \rho(k_\nu + \sigma_\nu) + \rho \sigma_\nu \frac{c}{4\pi} E_\nu$$

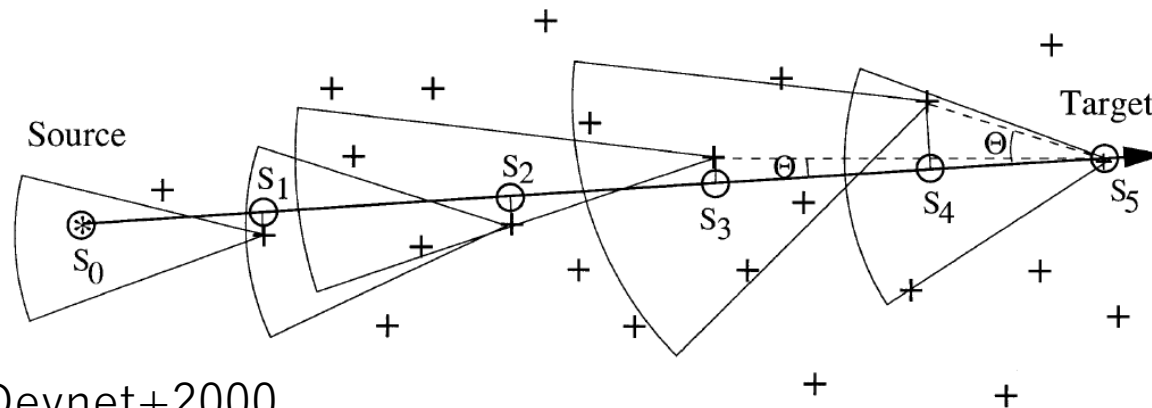
Ray tracing法

- 光源(N_s)からの光を各SPH粒子について計算したい
- 散乱と物質自身の放射を無視すると、初等的な輻射輸送でやるように

$$l^a \frac{\partial I_\nu}{\partial x^a} = -\rho \kappa_\nu$$

$$\therefore I_\nu(\tau_\nu) = I_\nu(\text{光源}) \exp(-\tau_\nu)$$

- 粒子と光源の間の光学的厚みがわかればよい。
→粒子から光源に向かって近傍探索を繰り返す



Ray tracing法

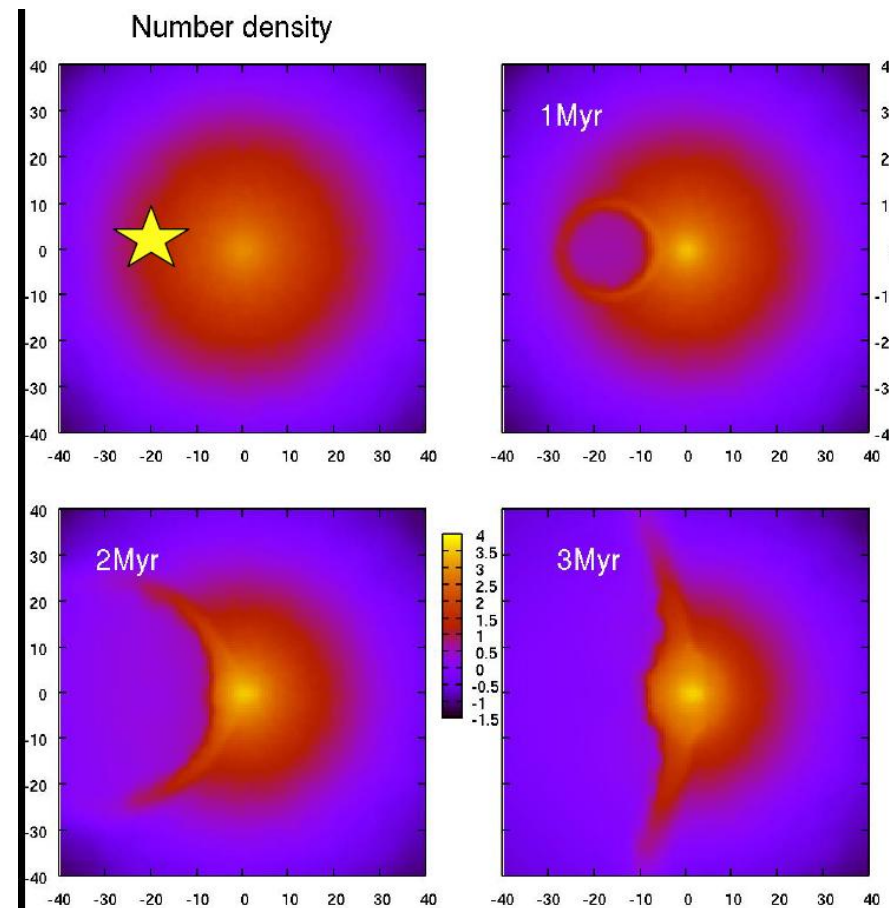
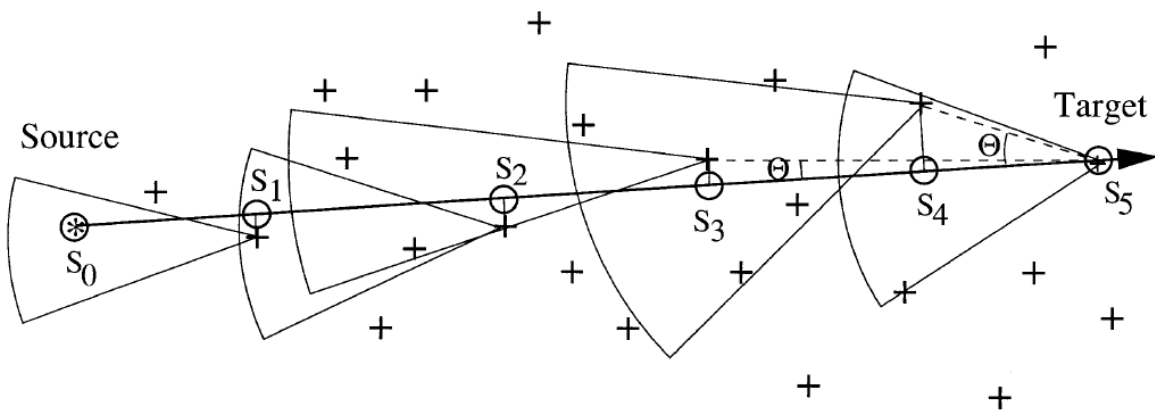
- アルゴリズム

1. S_i の近傍粒子のうち光線との θ が最も小さい粒子を決める
2. 垂線の足 S_{i-1} と S_i 間の光学的厚みを以下で求める

$$\Delta\tau_\nu = \frac{1}{2} \kappa_\nu (\rho_i + \rho_{i-1}) (s_i - s_{i-1})$$

3. 光源に達するまで繰り返す

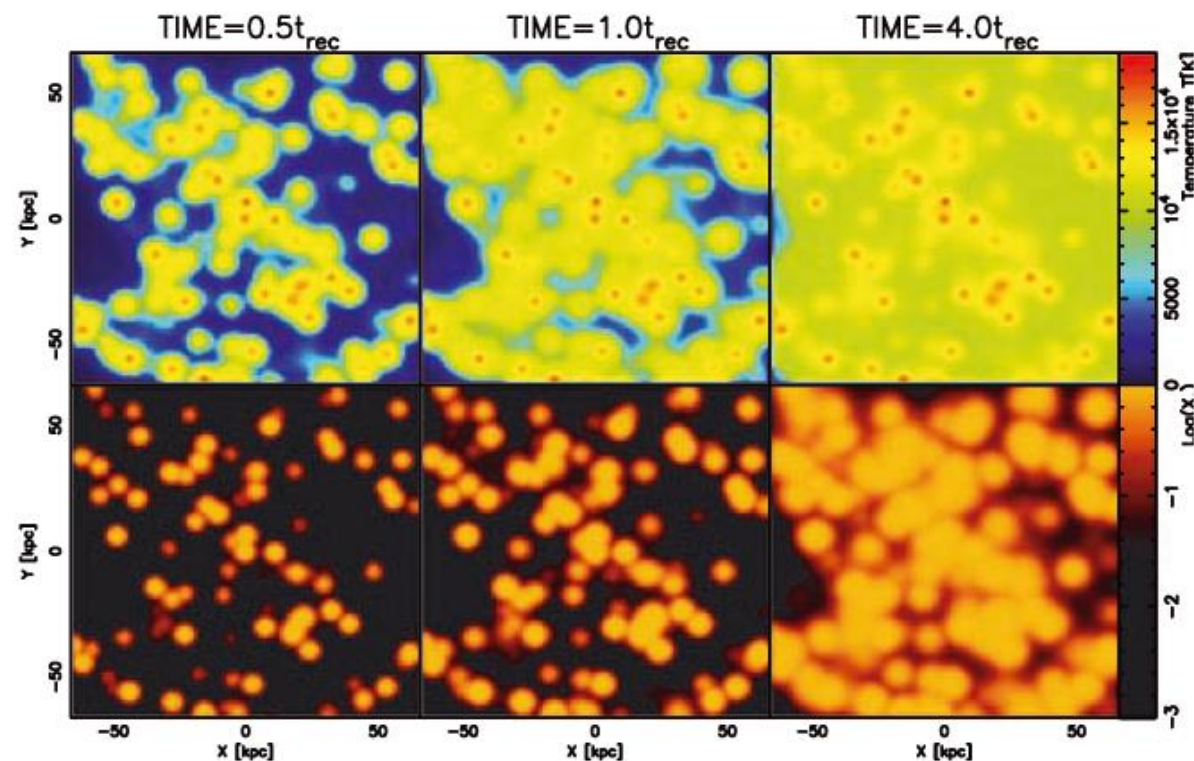
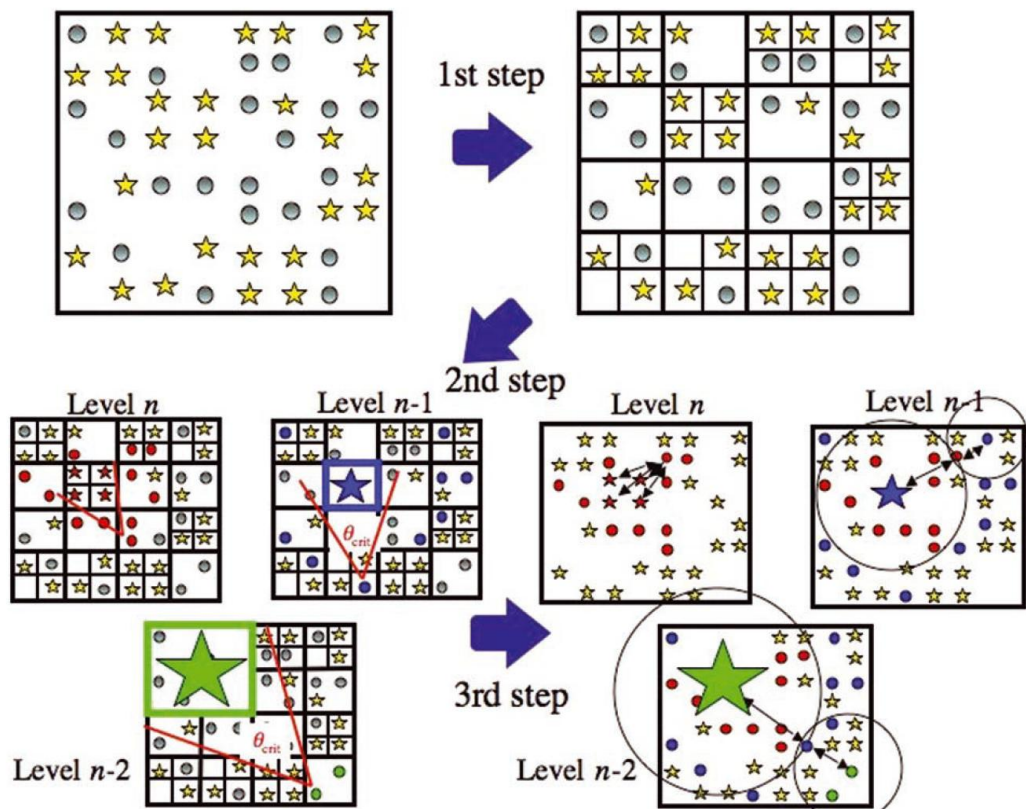
- 計算量は個々の粒子に対して光源の数だけ射影を取るなので $O(N_s N^{4/3})$ となる。
- 粒子の射影を省略して簡略化することで $O(N_s N)$ の計算量にできる (Susa 2006)



Tree-based Ray tracing 法

- 光源の数が増えるとray-tracingの計算量は大きくなり厳しい
(例えばすべてのSPH粒子が自分自身も放射する場合は $O(N^2)$)
→重力のように遠方の光源をまとめられないか?
- START法(Hasegawa+2010)
- 光源と受けての間の情報も必要で難しい
→まだまだ発展途上。今後の発展が望まれる。特に光学的に厚い場合が課題

Hasegawa+10



流体学校

3日目講義その2

ダスト

参考文献:

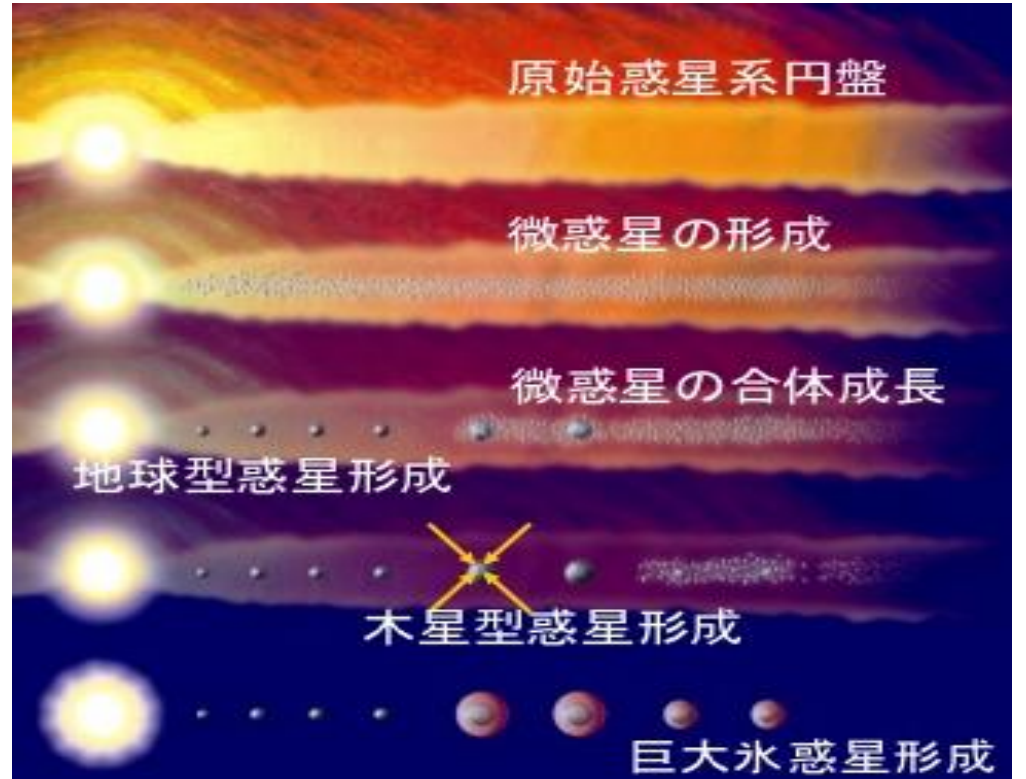
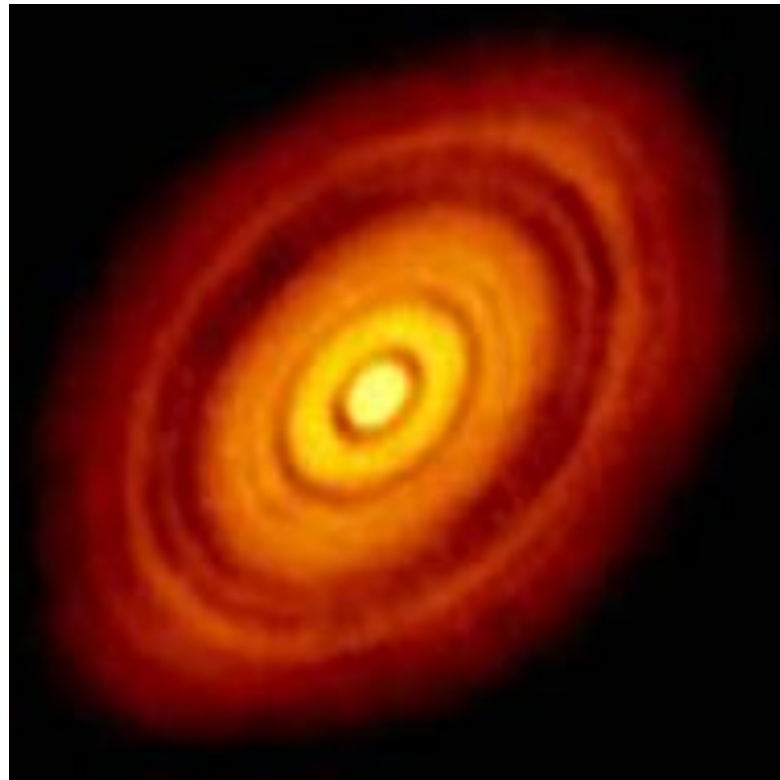
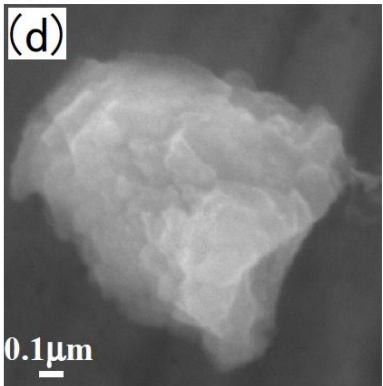
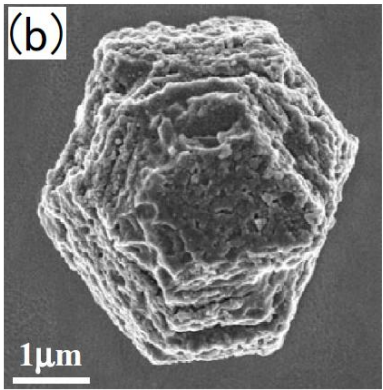
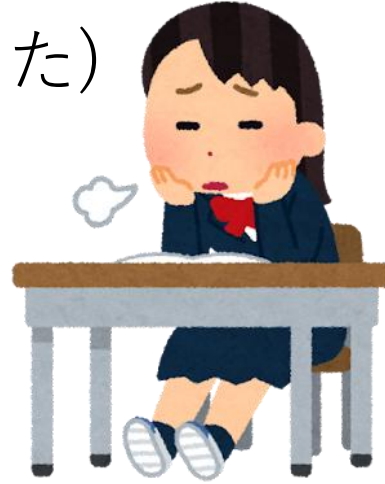
Koga S & Machida N 2022 MNRAS 粒子的取り扱い

Laibe & Price 2012a,b 2014 MNRAS dusty-SPH、2流体、混合1流体SPH

Tsukamoto+ 2021a,b ApJ ダスト-ガスSPMHD

ダストの重要性

- ダストってちりのことでしょ。何が面白いの？(と私は思っていました)
- ダストの役割
 - 低温ガスからの主要な輻射源
 - 微惑星、惑星の主要な材料
- ダストの生成、輸送、成長を知ることは我々の起源を知ること



ダストの流体近似と粒子近似

- ダストはガス粒子よりもはるかに重い(熱速度の小さい)粒子である
- シミュレーション上で
 - 粒子として扱うか? →粒子近似
 - 流体として扱うか? →流体近似
- それぞれ長所短所がある

煙突の煙の運動に似てるし流体かな?



砂粒に似てるし粒子かな?



ダストの流体近似と粒子近似

- ダストはガス粒子よりもはるかに重い(熱速度の小さい)粒子である

→シミュレーション上で

- 粒子として扱うか? → 粒子近似
- 流体として扱うか? → 流体近似
- それぞれ長所短所がある

• 流体近似:

長所 1. 密度速度などの物理量が連続的。

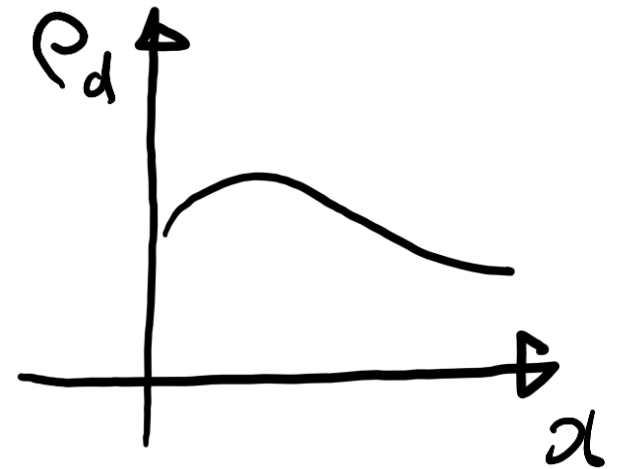
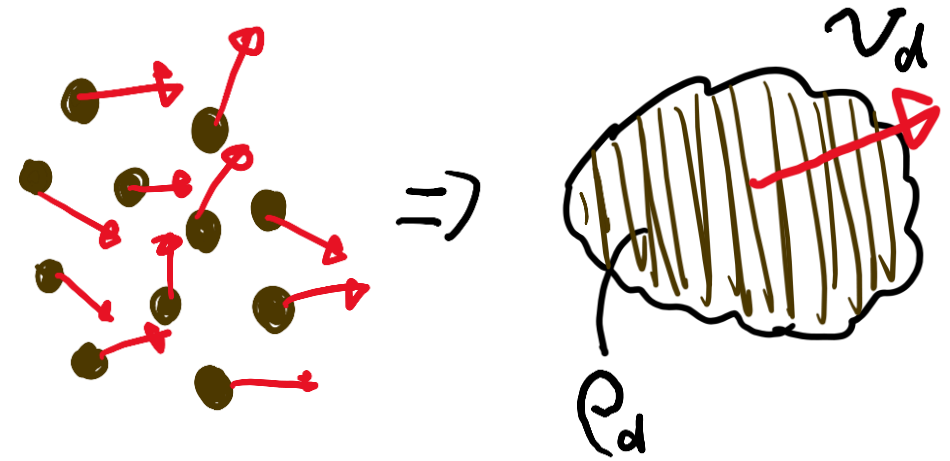
2. ガスとカップルしているときが得意

3. 空間分解能をガスと共通にできる

短所 1. ガスとdecoupleしているときが不得意

2. 各点で平均速度しかわからない

(decoupleしたダストは速度空間で分布を持つ)



ダストの流体近似と粒子近似

- ダストはガス粒子よりもはるかに重い(熱速度の小さい)粒子である

→シミュレーション上で

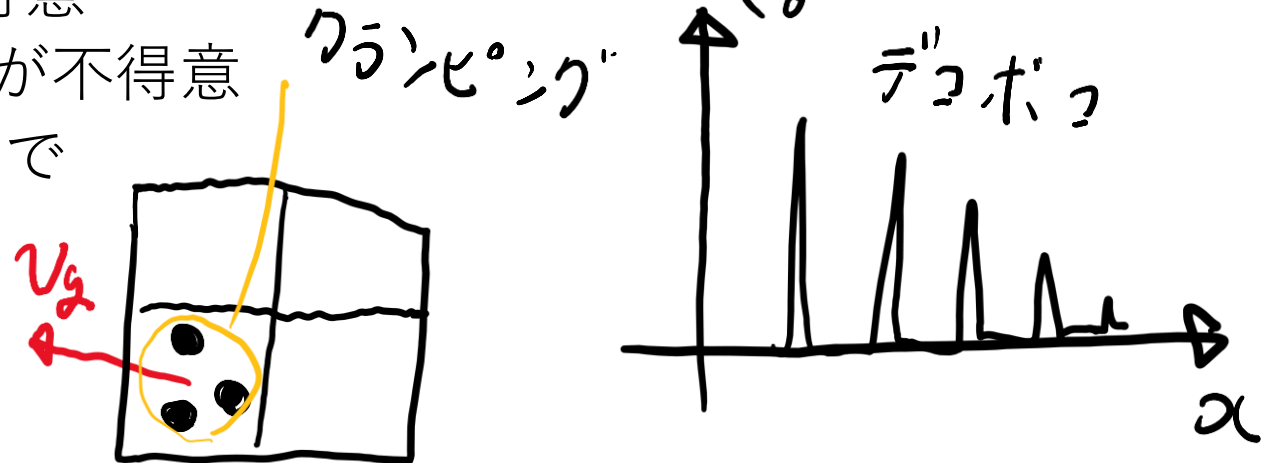
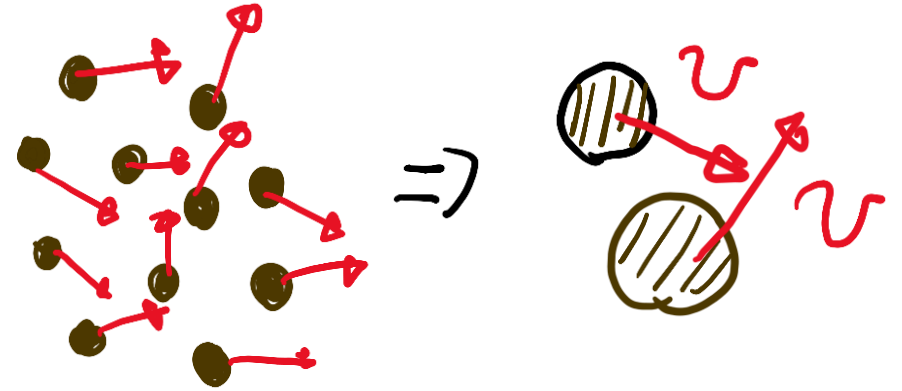
- 粒子として扱うか? →粒子近似
- 流体として扱うか? →流体近似
- それぞれ長所短所がある

- 粒子近似:

- 長所 1. 速度空間での分布も表現できる
- 2. ガスとdecoupleしているが得意

- 短所 1. ガスとcoupleしているところが不得意
- 2. 少数の粒子でモデル化するので物理量が凸凹になる

- 4. メッシュ法との相性が悪い(クランピング問題)



ダストの粒子近似

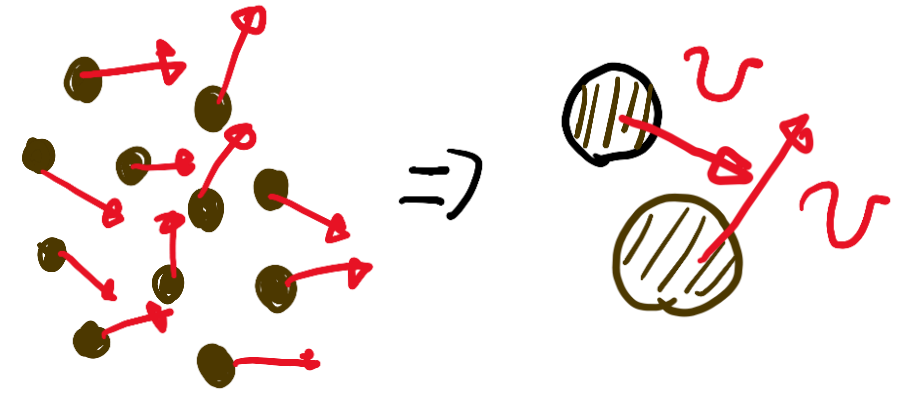
- 複数のダストを一つのダスト粒子 (スーパー粒子) に代表させる
- 個々のスーパー粒子について運動方程式を解く

$$m_d \frac{d\mathbf{v}_d}{dt} = -K_{particle}(\mathbf{v}_d - \mathbf{v}_g) + \mathbf{f}$$

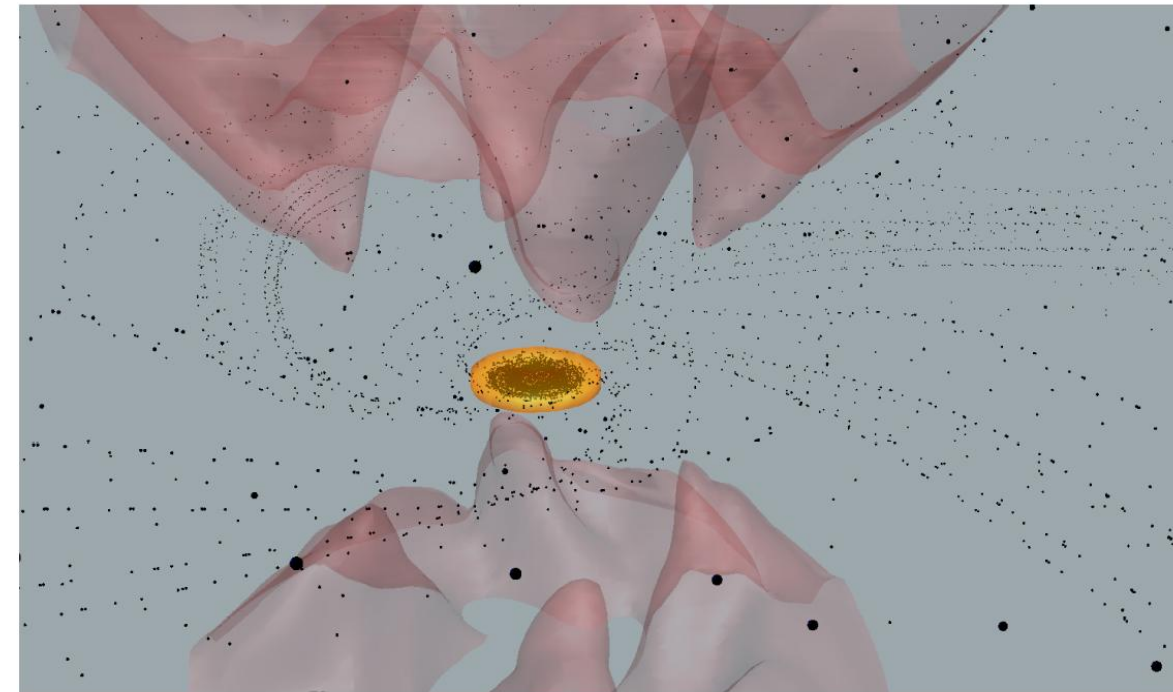
$K_{particle}$: 摩擦係数

$$\mathbf{F}_{drag} = K_{particle}(\mathbf{v}_d - \mathbf{v}_g)$$

1粒子あたりの摩擦力

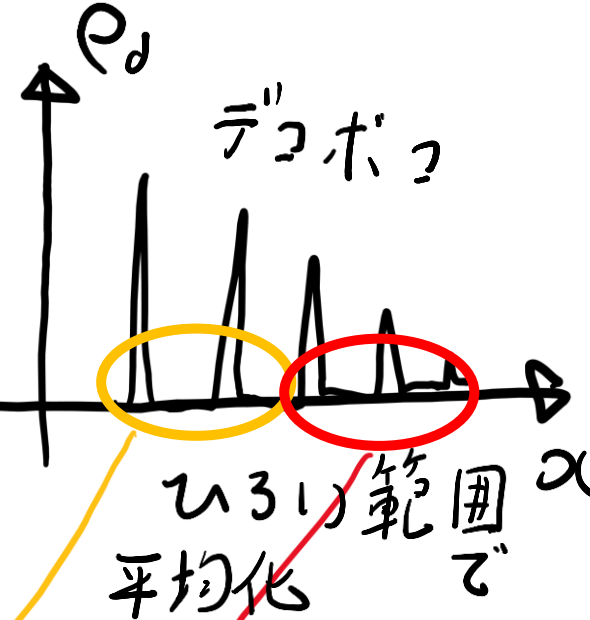
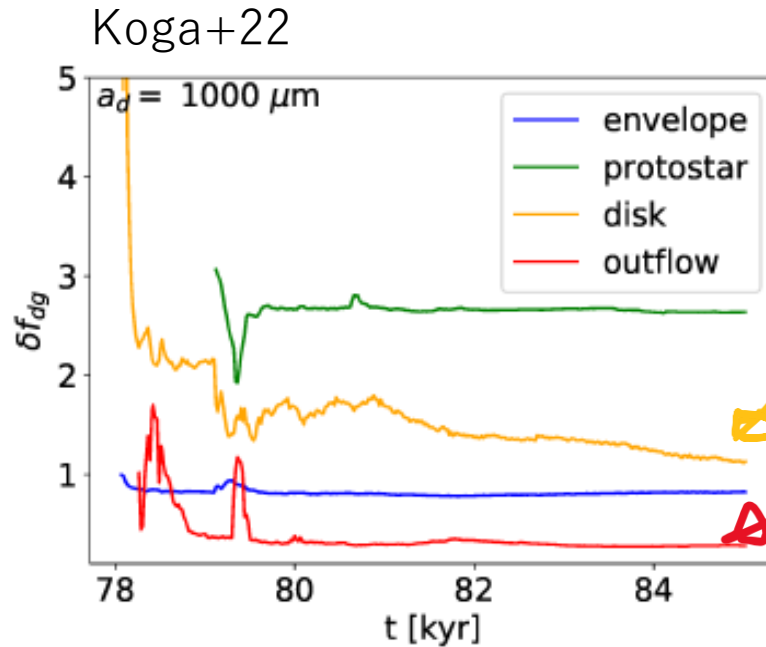
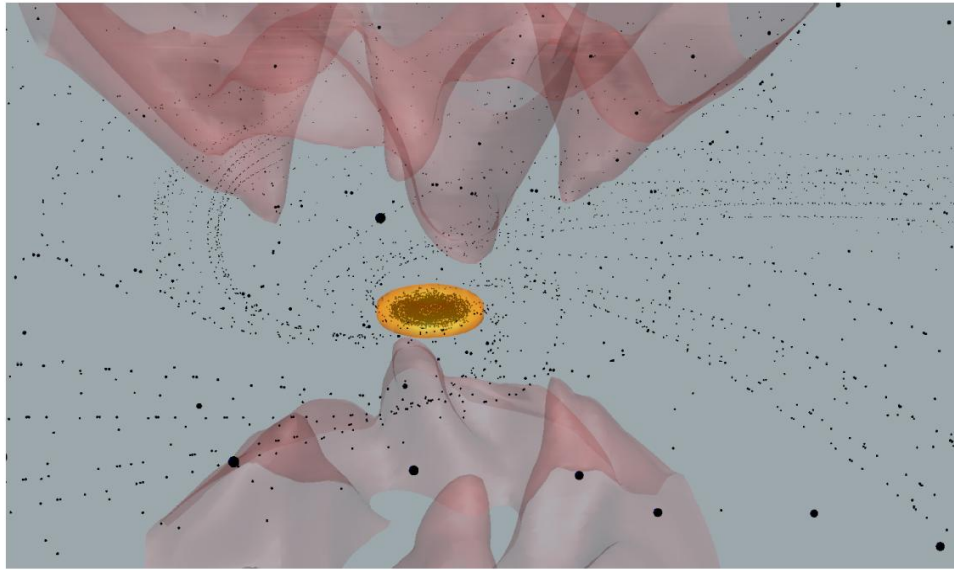
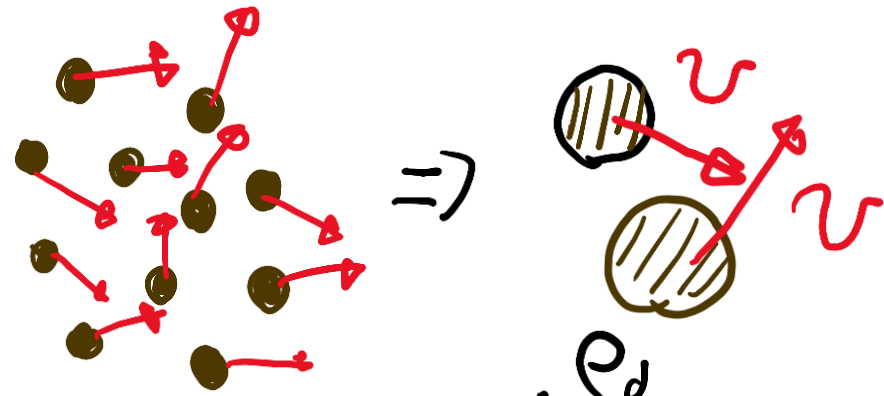


Koga+22



ダストの粒子近似

- 複数のダストを一つのダスト粒子 (スーパー粒子) に代表させる
- 円盤やアウトフロー「全域」の平均ダスト量しか出せてない



→ 任意の点でダストの物理量が知りたい → 流体近似

ダストガス2流体方程式

- 流体近似のもとでダストは圧力を持たない流体としてモデル化

$$\mathbf{F}_{drag}^V = K(\mathbf{v}_d - \mathbf{v}_g)$$

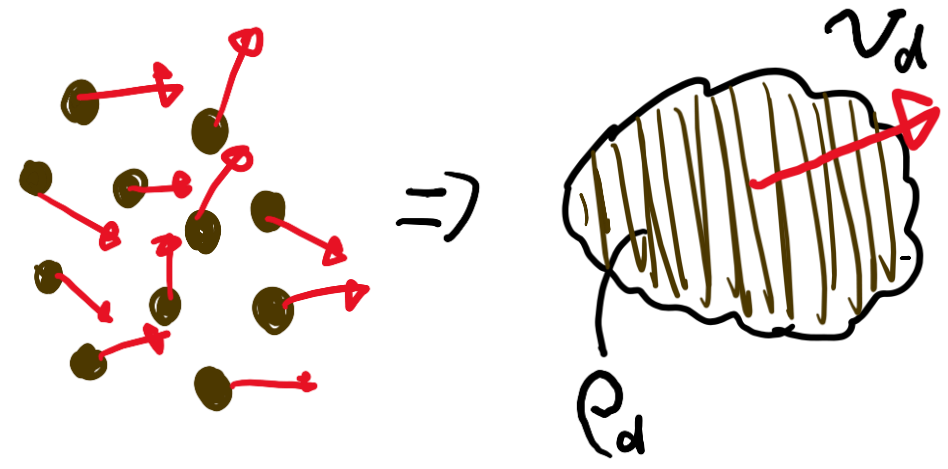
(単位体積当たりの摩擦力)

$$= \frac{\hat{\rho}_d}{m_d} \mathbf{F}_{drag}$$

(1粒子あたりの摩擦力)

$$\frac{\partial \rho_g}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_g \mathbf{v}_g) = 0,$$

$$\frac{\partial \rho_d}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_d \mathbf{v}_d) = 0,$$



$$\rho_g \left(\frac{\partial \mathbf{v}_g}{\partial t} + \mathbf{v}_g \cdot \nabla \mathbf{v}_g \right) = \rho_g \mathbf{f}_g + K(\mathbf{v}_d - \mathbf{v}_g) + \rho_g \mathbf{f},$$

$\curvearrowright \mathbf{F}_{drag}^V$

$$\rho_d \left(\frac{\partial \mathbf{v}_d}{\partial t} + \mathbf{v}_d \cdot \nabla \mathbf{v}_d \right) = \rho_d \mathbf{f}_d - K(\mathbf{v}_d - \mathbf{v}_g) + \rho_d \mathbf{f},$$

ガス抵抗則

• ダストがガスから受ける抵抗は

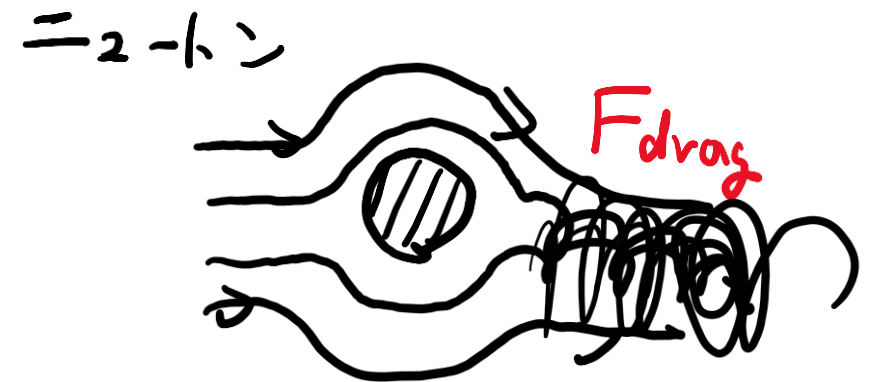
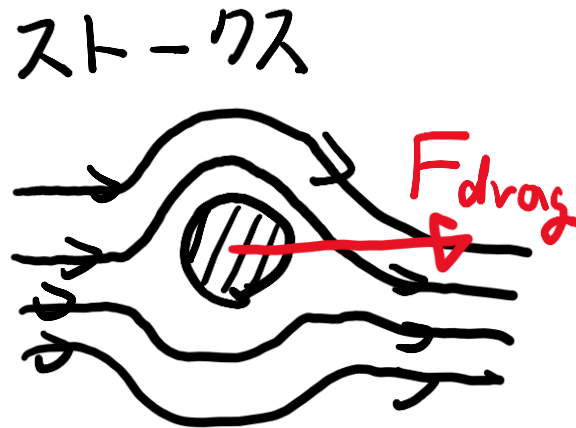
1. エプスタイン則 $a_d \ll \lambda_{mfp}$
2. ストークス則 $a_d \gg \lambda_{mfp}$ and $R_d < 1$
3. ニュートン則 $a_d \gg \lambda_{mfp}$ and $R_d > 1$

Raynolds数: $R_d = \frac{VL}{\nu}$

$$F_{\text{drag}} = -\frac{4\pi}{3} \rho_g s^2 \sqrt{\frac{8}{\pi\gamma}} c_s \sqrt{1 + \frac{9\pi}{128} \frac{\Delta v^2}{c_s^2}} \Delta v.$$

$$F_{\text{drag}} = -\frac{1}{2} C_D \pi s^2 \rho_g \Delta v \Delta v,$$

$$C_D = \begin{cases} 24R_d^{-1}, & R_d < 1, \\ 24R_d^{-0.6}, & 1 < R_d < 800, \\ 0.44, & 800 < R_d, \end{cases}$$



ダストガス2流体方程式のSPH

- ガス流体、ダスト流体をそれぞれSPH粒子で表現する (Laibe+12)
 - $\nu = 3$ (空間次元)、 θ :ダストの空間充填率(~ 1)

$$\hat{\rho}_a = \sum_b m_b W_{ab}(h_a),$$

$$h_a = \eta \left(\frac{m_a}{\hat{\rho}_a} \right)^{1/\nu},$$

$$\hat{\rho}_i = \sum_j m_j W_{ij}(h_i),$$

$$h_i = \eta \left(\frac{m_j}{\hat{\rho}_i} \right)^{1/\nu},$$

$$\frac{d\mathbf{v}_a}{dt} = - \sum_b m_b \left[\frac{P_a \tilde{\theta}_a}{\Omega_a \hat{\rho}_a^2} \nabla_a W_{ab}(h_a) + \frac{P_b \tilde{\theta}_b}{\Omega_b \hat{\rho}_b^2} \nabla_a W_{ab}(h_b) \right]$$

$$- \sum_j m_j \frac{P_a (1 - \theta_a)}{\hat{\rho}_a \hat{\rho}_{d,a}} \nabla_a W_{aj}(h_a)$$

$$+ \nu \sum_j m_j \frac{K_{aj}}{\hat{\rho}_a \hat{\rho}_j} (\mathbf{v}_{aj} \cdot \hat{\mathbf{r}}_{aj}) \hat{\mathbf{r}}_{aj} D_{aj}(h_a),$$

$$\frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = \sum_b m_b \frac{P_b (1 - \theta_b)}{\hat{\rho}_b \hat{\rho}_{d,b}} \nabla_i W_{bi}(h_b)$$

$$- \nu \sum_b m_b \frac{K_{bi}}{\hat{\rho}_b \hat{\rho}_i} (\mathbf{v}_{bi} \cdot \hat{\mathbf{r}}_{bi}) \hat{\mathbf{r}}_{bi} D_{ib}(h_i),$$

ダストガス2流体方程式のSPH

Laibe+12

- 摩擦項のカーネル D_{aj} は通常のベル型カーネルから変更したほうが精度が出る
- 摩擦項の離散化誤差を最小化するように取る

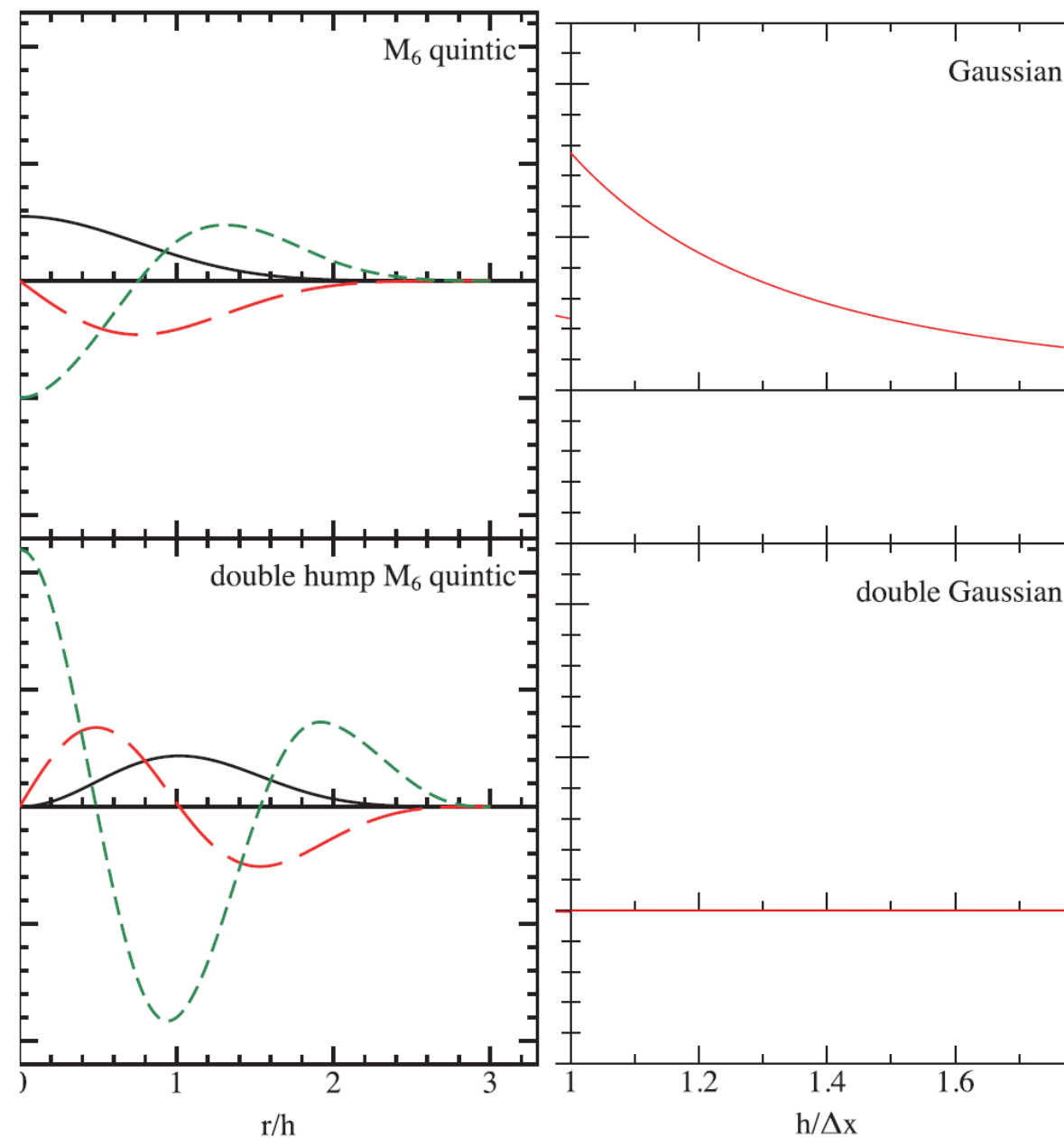
$$\frac{d\mathbf{v}_a}{dt} = - \sum_b m_b \left[\frac{P_a \tilde{\theta}_a}{\Omega_a \hat{\rho}_a^2} \nabla_a W_{ab}(h_a) + \frac{P_b \tilde{\theta}_b}{\Omega_b \hat{\rho}_b^2} \nabla_a W_{ab}(h_b) \right]$$

$$- \sum_j m_j \frac{P_a (1 - \theta_a)}{\hat{\rho}_a \hat{\rho}_{d,a}} \nabla_a W_{aj}(h_a)$$

$$+ v \sum_j m_j \frac{K_{aj}}{\hat{\rho}_a \hat{\rho}_j} (\mathbf{v}_{aj} \cdot \hat{\mathbf{r}}_{aj}) \hat{\mathbf{r}}_{aj} D_{aj}(h_a),$$

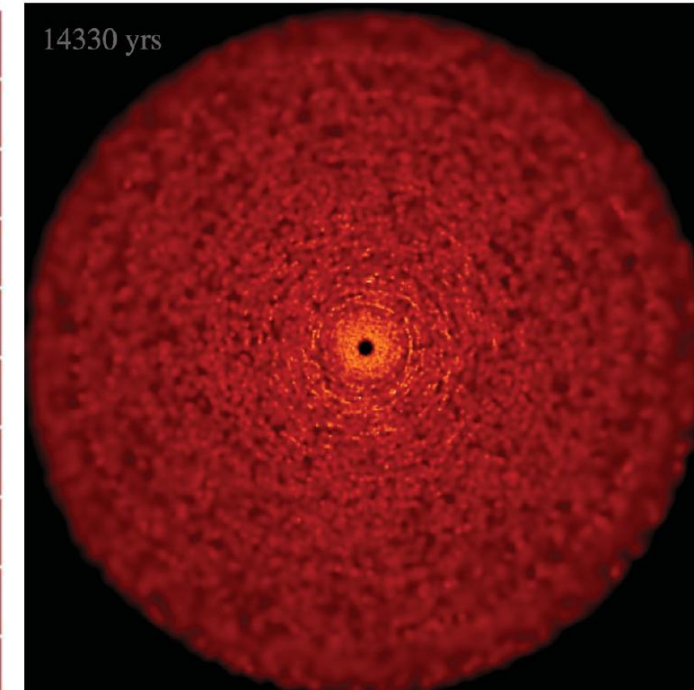
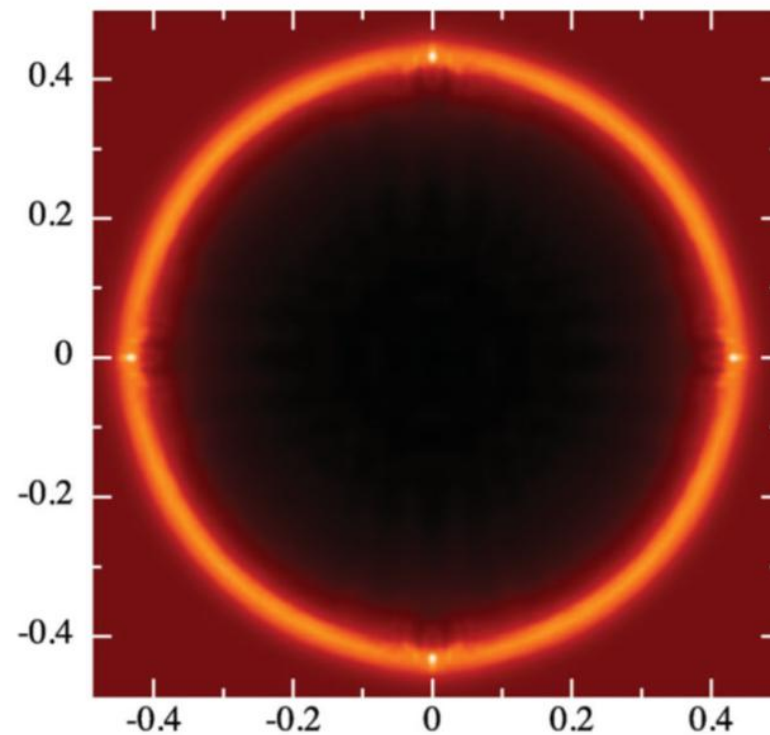
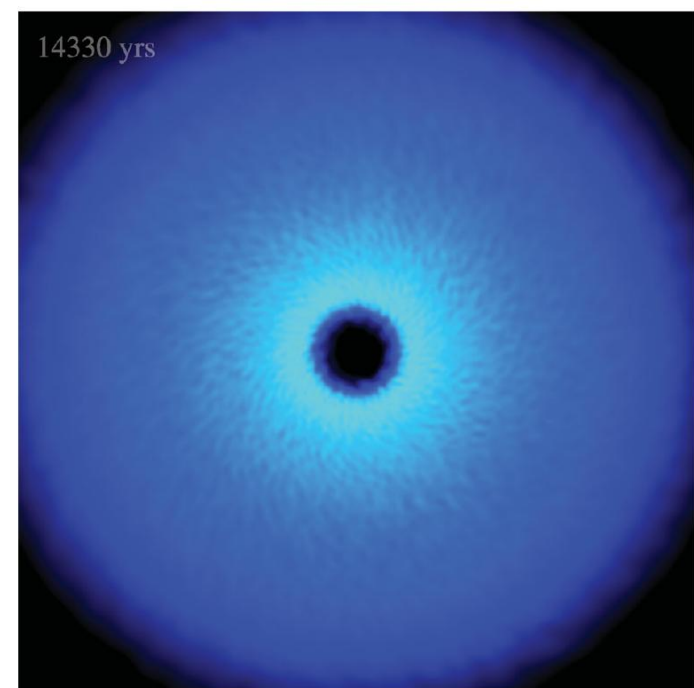
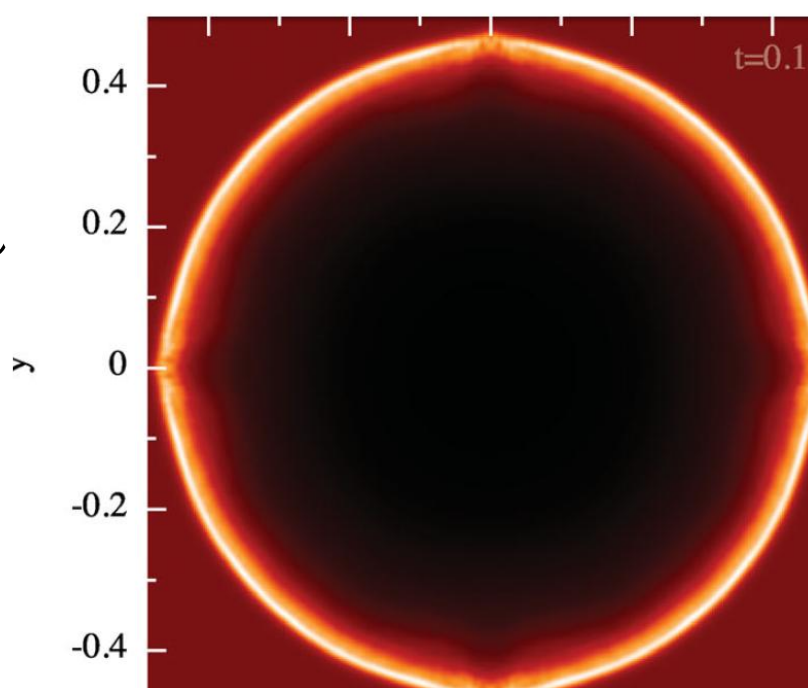
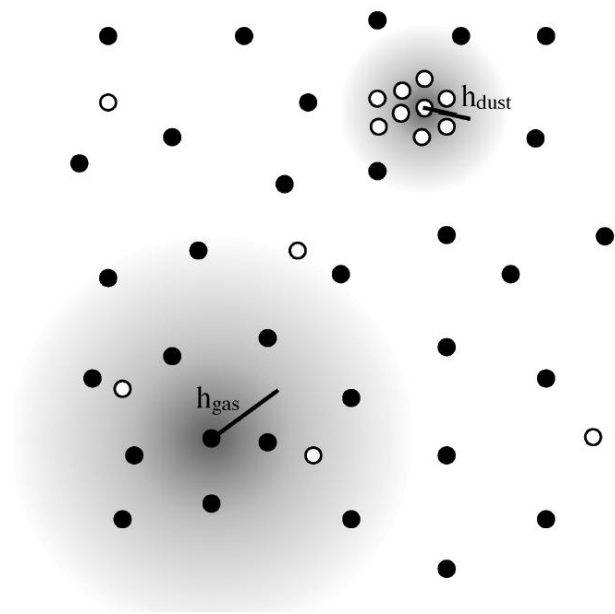
$$\frac{1}{\hat{\rho}_g} \langle K \Delta \mathbf{v} \rangle = -v \frac{K_a}{\hat{\rho}_a} (\mathbf{v}_a^g - \mathbf{v}_a^d) \cdot \sum_j \frac{m_j}{\hat{\rho}_j} \hat{\mathbf{r}}_{aj} \hat{\mathbf{r}}_{aj} D_{aj} + \mathcal{O}(h),$$

$$\Rightarrow v \sum_j \frac{m_j}{\hat{\rho}_j} \hat{\mathbf{r}}_{aj}^\alpha \hat{\mathbf{r}}_{aj}^\beta D_{aj} \approx \delta^{\alpha\beta}. \quad \Leftrightarrow \sum_b \frac{m_b}{\rho_b} W_{ab} \approx 1$$



テスト計算

- ダストの分布に凸凹が見られる
 - 異なる空間分解能のためクランピングが起きている
 - 粒子近似と類似の問題
- せっきくの流体近似が生かせていない



ダストガス混合1流体SPH

- ガスとダストの2種類のSPH粒子を使ったことが問題だった
 → ガスとダストの混合流体を1種類の流体として扱えばどうか？
 1. ダストとガスの全密度、ダストガス質量比、重心運動、相対運動 Δv を独立変数にとる
 ダストとガスが同じ空間解像度をもつ → クランピングの問題がない

$$\rho \equiv \rho_g + \rho_d \quad \mathbf{v} \equiv \frac{\rho_g \mathbf{v}_g + \rho_d \mathbf{v}_d}{\rho_g + \rho_d}$$

$$\Delta \mathbf{v} \equiv \mathbf{v}_d - \mathbf{v}_g \quad \epsilon \equiv \rho_d / \rho$$

$$\frac{\partial \rho_g}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_g \mathbf{v}_g) = 0,$$

$$\frac{\partial \rho_d}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_d \mathbf{v}_d) = 0,$$

$$\rho_g \left(\frac{\partial \mathbf{v}_g}{\partial t} + \mathbf{v}_g \cdot \nabla \mathbf{v}_g \right) = \rho_g \mathbf{f}_g + K(\mathbf{v}_d - \mathbf{v}_g) + \rho_g \mathbf{f},$$

$$\rho_d \left(\frac{\partial \mathbf{v}_d}{\partial t} + \mathbf{v}_d \cdot \nabla \mathbf{v}_d \right) = \rho_d \mathbf{f}_d - K(\mathbf{v}_d - \mathbf{v}_g) + \rho_d \mathbf{f},$$

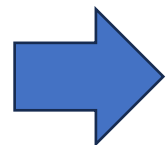
Laibe+14

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho(\nabla \cdot \mathbf{v}), \tag{24}$$

$$\frac{d\epsilon}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla \cdot [\epsilon(1-\epsilon)\rho\Delta\mathbf{v}], \quad t_{\text{stop}} = \rho_d/K \tag{25}$$

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{\nabla P_g}{\rho} - \frac{1}{\rho} \nabla \cdot [\epsilon(1-\epsilon)\rho\Delta\mathbf{v}\Delta\mathbf{v}] + \mathbf{f}, \tag{26}$$

$$\frac{d\Delta\mathbf{v}}{dt} = -\frac{\Delta\mathbf{v}}{t_s} + \frac{\nabla P_g}{(1-\epsilon)\rho} - (\Delta\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} + \frac{1}{2} \nabla [(2\epsilon - 1)\Delta\mathbf{v}^2], \tag{27}$$

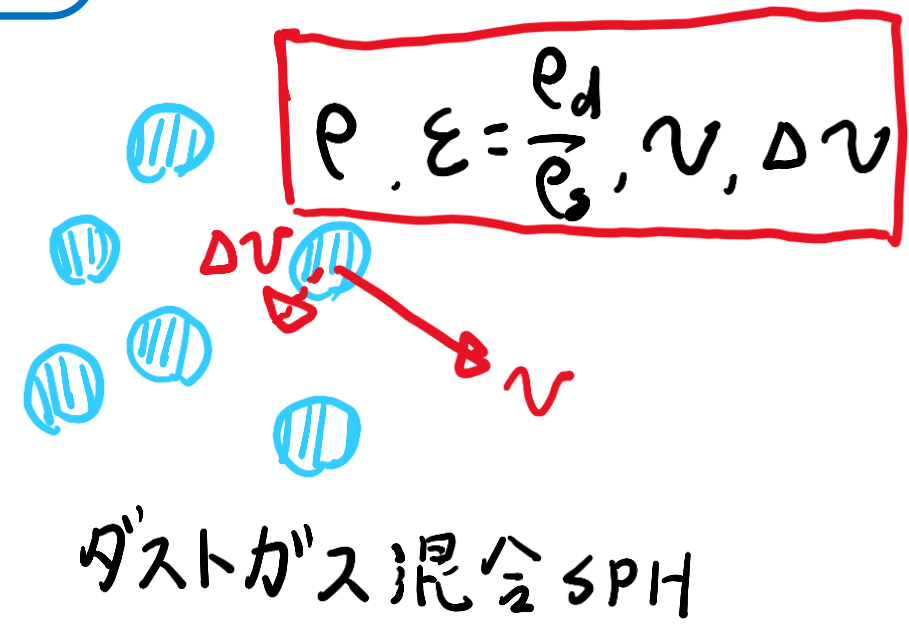
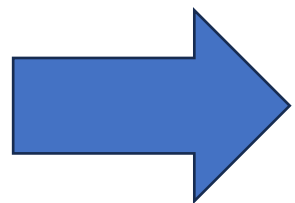
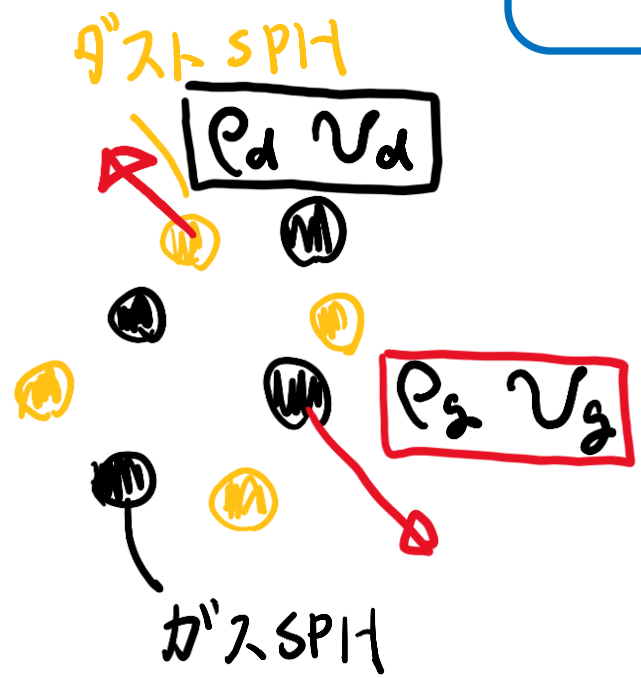


ダストガス混合1流体SPH

- ガスとダストの2種類のSPH粒子を使ったことが問題だった
 → ガスとダストの混合流体を1種類の流体として扱えばどうか？
 1. ダストとガスの全密度、ダストガス質量比、重心運動、相対運動 Δv を独立変数にとる
 ダストとガスが同じ空間解像度をもつ → クランピングの問題がない

$$\rho \equiv \rho_g + \rho_d \quad \mathbf{v} \equiv \frac{\rho_g \mathbf{v}_g + \rho_d \mathbf{v}_d}{\rho_g + \rho_d}$$

$$\Delta \mathbf{v} \equiv \mathbf{v}_d - \mathbf{v}_g \quad \epsilon \equiv \rho_d / \rho$$



Dusty SPMHDの基礎方程式と近似

- Tsukamoto+21ではGodunov SPMHDをdust-gas混合流体化した

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho\nabla \cdot \mathbf{v},$$

$$\frac{D\Delta\mathbf{v}}{Dt} = -\frac{\Delta\mathbf{v}}{t_{\text{stop}}} + \frac{1}{\rho_g} \left[-\nabla P_g + \frac{\mathbf{J} \times \mathbf{B}}{c} \right]$$

$$\frac{D\epsilon}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \cdot \{ \epsilon(1 - \epsilon)\rho\Delta\mathbf{v} \},$$

$$- (\Delta\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} + \frac{1}{2}\nabla\{(2\epsilon - 1)\Delta\mathbf{v}^2\}.$$

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \frac{1}{\rho} \left\{ -\nabla P_g + \left(\frac{\mathbf{J} \times \mathbf{B}}{c} \right) \right\}$$

$$\begin{aligned} \frac{D\mathbf{B}}{Dt} &= -\mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{v}) + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{v} \\ &+ c\nabla \times \{ \eta_O \mathbf{J} + \eta_H \mathbf{J} \times \hat{\mathbf{B}} + \eta_A (\mathbf{J} \times \hat{\mathbf{B}}) \times \hat{\mathbf{B}} \} \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{\rho} \nabla \cdot \{ \epsilon(1 - \epsilon)\rho\Delta\mathbf{v}\Delta\mathbf{v} \} + \mathbf{f},$$

$$\begin{aligned} \frac{De_g}{Dt} &= \frac{1}{(1 - \epsilon)\rho} \nabla \cdot \left[\left\{ -(P_g + \frac{\mathbf{B}^2}{8\pi})\mathbb{I} - \frac{\mathbf{B}\mathbf{B}}{4\pi} \right\} \cdot (\mathbf{v} - \epsilon\Delta\mathbf{v}) \right. \\ &+ \left. \frac{c}{4\pi} \mathbf{E}' \times \mathbf{B} \right] + \frac{\mathbf{J} \cdot \mathbf{E}'}{(1 - \epsilon)\rho c} - \epsilon(\Delta\mathbf{v} \cdot \nabla)e + \epsilon \frac{\Delta\mathbf{v}^2}{t_{\text{stop}}} \end{aligned} \quad (46)$$

Dusty SPMHD 離散化

- ダストに関連しない部分は通常のGSPMHDを用いる
- ダストガス比に人工粘性が必要

$$\begin{aligned}
 \frac{D\epsilon_i}{Dt} &= -\sum_j m_j [\epsilon_i(1-\epsilon_i) \frac{\Delta \mathbf{v}_i \cdot \nabla W_{ij}(h_i)}{\Omega_i \rho_i} \\
 &+ \epsilon_j(1-\epsilon_j) \frac{\Delta \mathbf{v}_j \cdot \nabla W_{ij}(h_j)}{\Omega_j \rho_j} \\
 &+ \frac{\alpha_\epsilon v_{\text{sig},\epsilon}}{\bar{\rho}} (\epsilon_i - \epsilon_j) \mathbf{e}_{ij} \cdot \nabla \bar{W}_{ij}], \\
 \frac{D\Delta \mathbf{v}_i}{Dt} &= -\frac{\Delta \mathbf{v}_i}{t_{\text{stop}}} - \frac{1}{1-\epsilon_i} \frac{D\mathbf{v}}{Dt} \Big|_{\text{GSPMHD}}, \\
 \frac{De_i}{Dt} &= \epsilon_i \frac{\Delta \mathbf{v}_i^2}{t_{\text{stop}}} + \frac{1}{1-\epsilon_i} \frac{De}{Dt} \Big|_{\text{GSPMHD}} \\
 &- \sum_j m_j [\epsilon_i(\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j) \frac{\Delta \mathbf{v}_i \cdot \nabla W_{ij}(h_i)}{\Omega_i \rho_i}],
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{D\mathbf{v}_i}{Dt} &= \frac{D\mathbf{v}}{Dt} \Big|_{\text{GSPMHD}} - \sum_j [\cancel{\epsilon_i(1-\epsilon_i) \Delta \mathbf{v}_i} \frac{\Delta \mathbf{v}_i \cdot \nabla W_{ij}(h_i)}{\Omega_i \rho_i} \\
 &+ \cancel{\epsilon_j(1-\epsilon_j) \Delta \mathbf{v}_j} \frac{\Delta \mathbf{v}_j \cdot \nabla W_{ij}(h_j)}{\Omega_j \rho_j}], \quad (50)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\Delta \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}}{(\mathbf{f}_{g,p} + \mathbf{f}_{g,em})} &= O\left(\frac{|\Delta \mathbf{v}| |\mathbf{v}| / L}{(c_s^2 + v_A^2) / L}\right) = O\left(\frac{|\Delta \mathbf{v}| |\mathbf{v}|}{(c_s^2 + v_A^2)}\right), \\
 \frac{\nabla \Delta \mathbf{v}^2}{(\mathbf{f}_{g,p} + \mathbf{f}_{g,em})} &= O\left(\frac{\Delta \mathbf{v}^2 / L}{(c_s^2 + v_A^2) / L}\right) = O\left(\frac{\Delta \mathbf{v}^2}{(c_s^2 + v_A^2)}\right).
 \end{aligned}$$

テスト計算の結果、ダストの相対速度の2次の項については落としたほうが性質が良い
 ダスト相対速度が音速以下ならばよい近似

テスト計算ダスト-ガス2流体波動

$$\frac{D_g \rho_g}{Dt} = -\rho_g \nabla \cdot \mathbf{v}_g,$$

$$\frac{D_g \mathbf{v}_g}{Dt} = \frac{(\mathbf{v}_d - \mathbf{v}_g)}{t_{\text{stop}}} + \frac{1}{\rho_g} \{-\nabla P_g + (\rho_g \mathbf{E} + \frac{\mathbf{J}_g \times \mathbf{B}}{c})\}$$

$$\frac{D_d \rho_d}{Dt} = -\rho_d \nabla \cdot \mathbf{v}_d$$

磁場なし

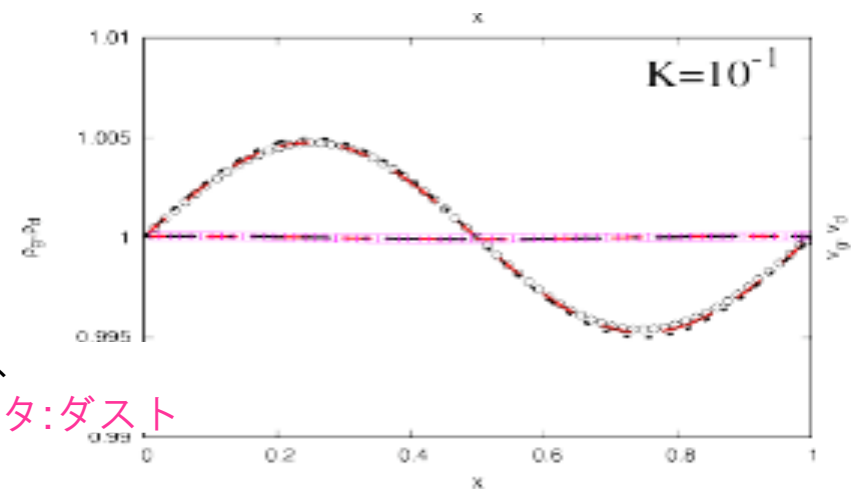
$$\frac{D_d \mathbf{v}_d}{Dt} = -\frac{(\mathbf{v}_d - \mathbf{v}_g)}{t_{\text{stop}}}$$

$$\begin{pmatrix} -i\omega + \frac{K}{\rho_{g,0}} & -\frac{K}{\rho_{g,0}} & \frac{ic_g^2 k}{\rho_{g,0}} & 0 \\ -\frac{K}{\rho_{d,0}} & -i\omega - \frac{K}{\rho_{d,0}} & 0 & 0 \\ ik\rho_{g,0} & 0 & -i\omega & 0 \\ 0 & ik\rho_{g,0} & 0 & -i\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_g \\ V_d \\ D_g \\ D_d \end{pmatrix} = 0$$

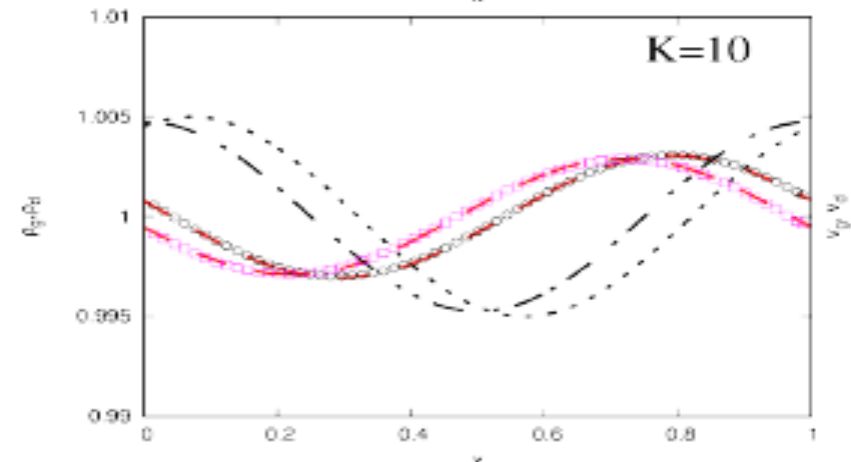
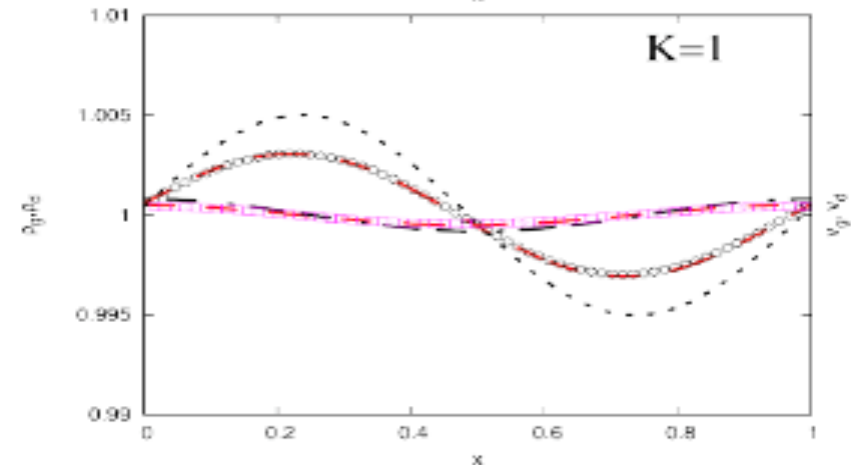
$$\omega = 2\pi - K/(2\rho_d)i \quad (K \rightarrow 0),$$

$$\omega = \sqrt{2}\pi \quad (K \rightarrow \infty).$$

弱結合 ($K \ll 1$) から強結合 ($K \gg 1$) までよく解けている



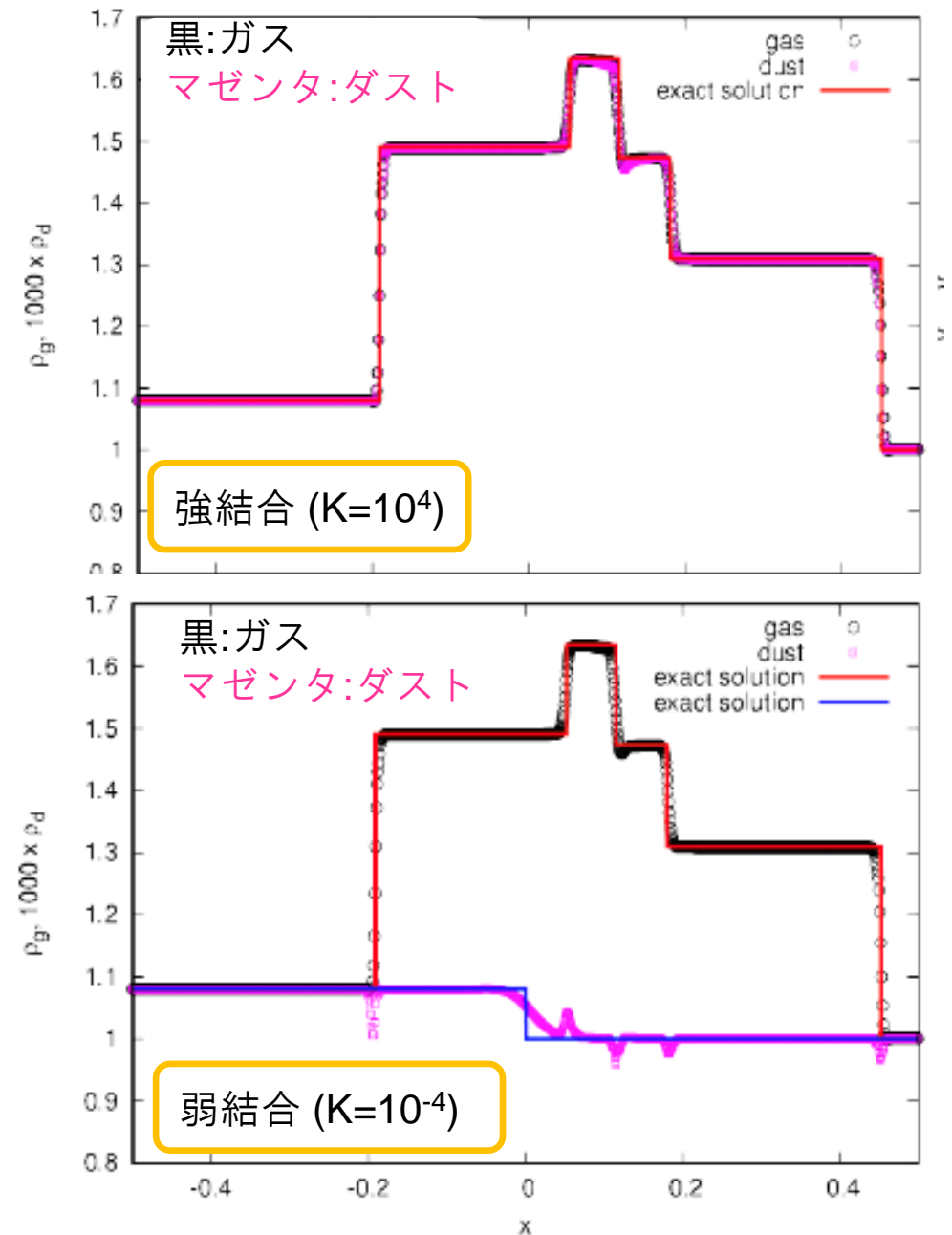
黒:ガス
マゼンタ:ダスト



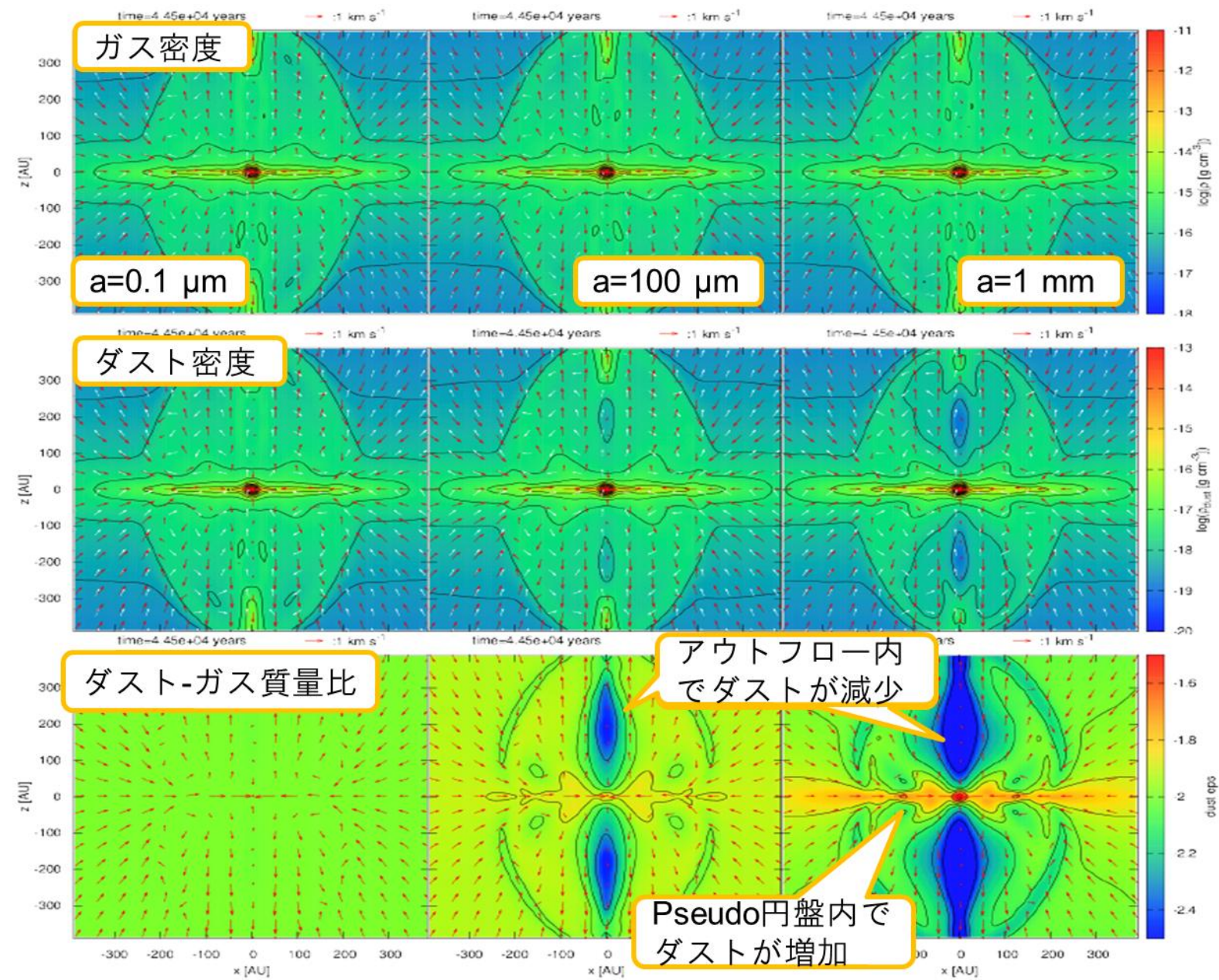
ダスト-ガス2流体MHD衝撃波

- 強結合では
 厳密解によく一致
- 弱結合では
 - ショック面などでダストにovershootがみられる(数%程度)
 - 初期不連続が数値粘性でなまっている
- ダストとガスのカップリングが弱いところでは要注意
- ただし、ダストとガスのカップリングが弱いところではそもそも流体近似も破れる(ダストの速度分布が重要)

→粒子近似とのハイブリッドが望まれる



ダスト-ガス2流体重力崩壊テスト



ダスト成長アルゴリズム

- 単一ダストサイズ近似+ダスト成長/破壊 (Sato & Okuzumi+17)

$$\frac{D_d m_p}{Dt} = A_{\text{gain/loss}} \frac{m_p}{t_{\text{col}}},$$

where $t_{\text{col}} = 4\pi a_d^2 n_d \Delta v_{dd}$ This can be rewritten as

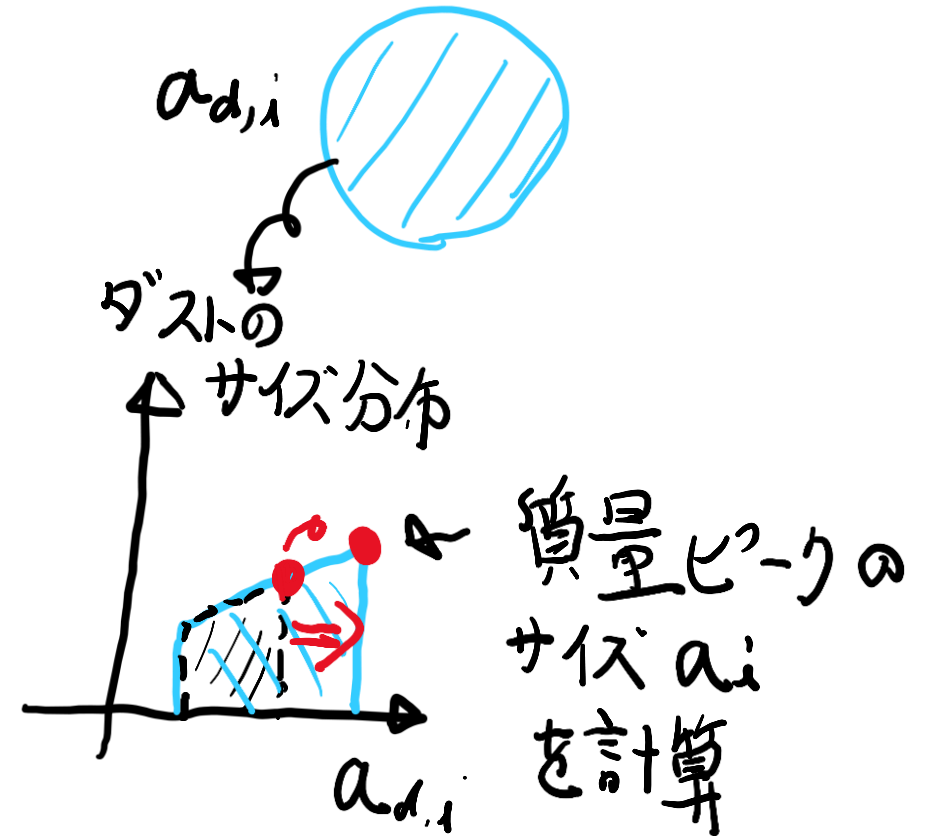
$$\frac{D_d a_d}{Dt} = A_{\text{gain/loss}} \frac{a_d}{3t_{\text{col}}}.$$

Here

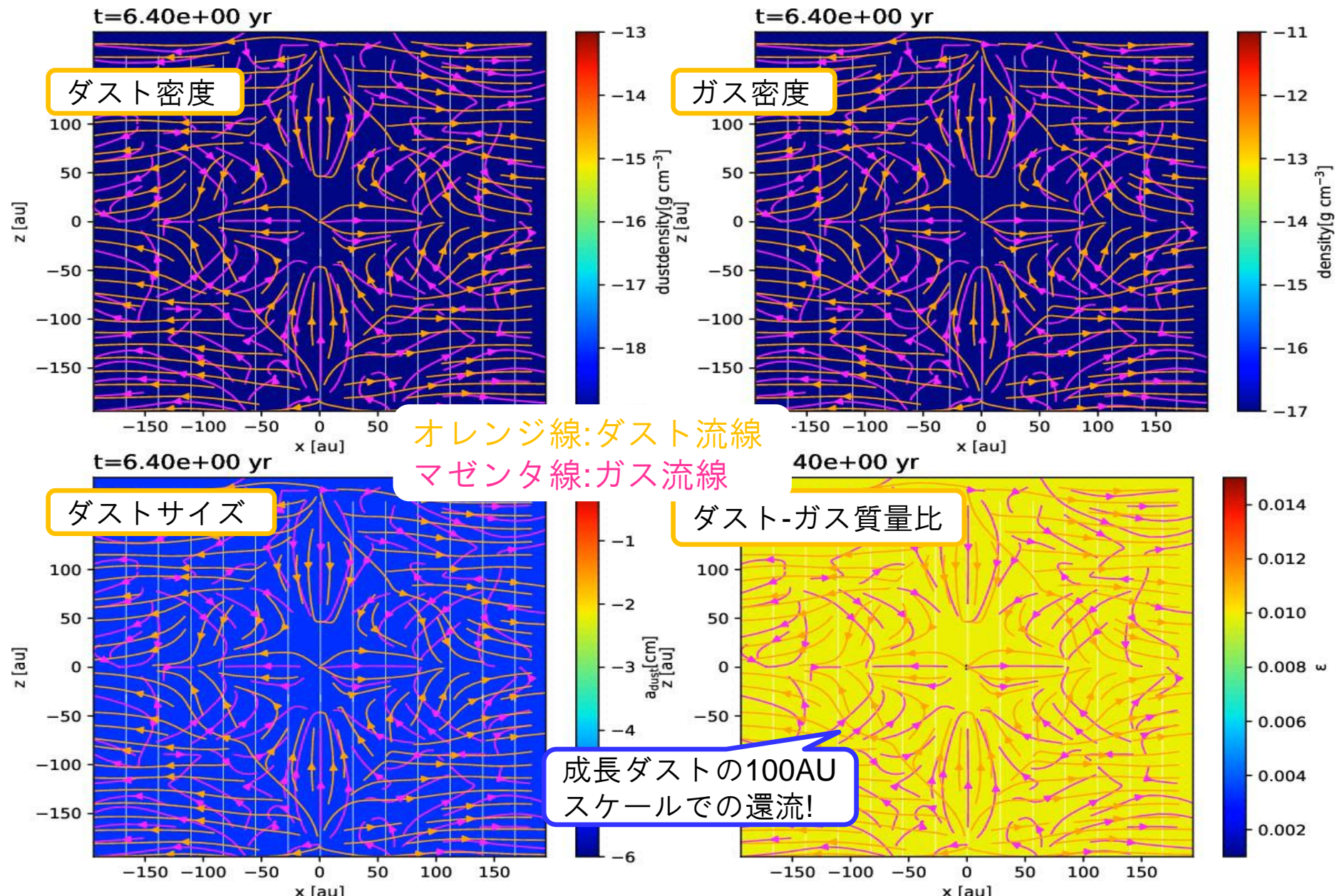
$$A_{\text{gain/loss}} = \min\left(1, -\frac{\ln(\Delta v_{dd}/\Delta v_{\text{frag}})}{\ln 5}\right),$$

$$\begin{aligned} \frac{D a_{d,i}}{Dt} &= A_{\text{gain/loss}} \frac{a_{d,i}}{3t_{\text{growth}}} \\ &- (1 - \epsilon) \sum_j m_j (a_{d,j} - a_{d,i}) \frac{\Delta \mathbf{v}_i \cdot \nabla W_{ij}(h_i)}{\Omega_i \rho_i} \\ &+ \frac{\alpha \Delta \mathbf{v} v_{\text{sig}, \Delta \mathbf{v}}}{\bar{\rho}} (a_{d,i} - a_{d,j}) \mathbf{e}_{ij} \cdot \nabla \bar{W}_{ij}. \end{aligned}$$

SPH粒子



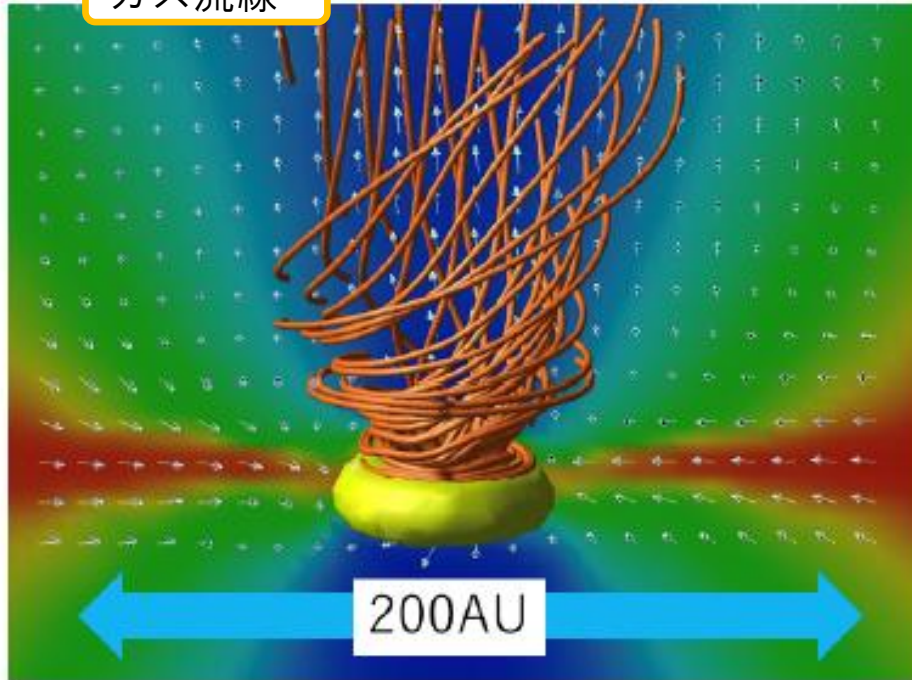
シミュレーション結果



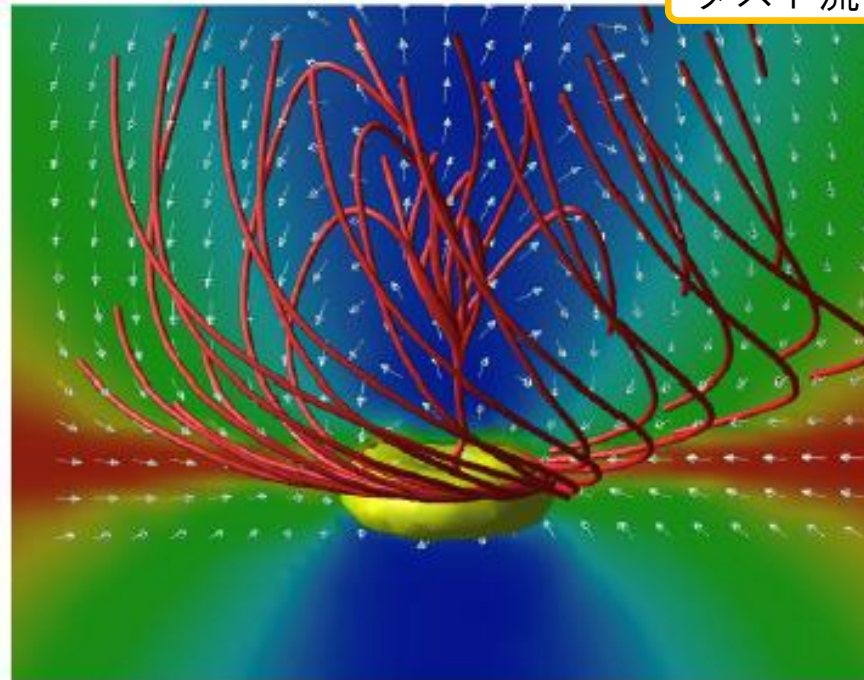
原始惑星系円盤への「降灰」

- 数mmのダストが数100AUスケールに還流されつつ円盤外縁に戻る
→ 成長したダストがエンベロープに供給され、円盤の外縁に「降灰」

ガス流線



ダスト流線



降灰メカニズムの全体プロセス

