

Smoothed Particle Hydrodynamics

斎藤貴之(神戸大学)

Contents

1. 理論パート

- SPH の原理
 - Standard SPH
 - Density independent SPH
- その他
 - 人工粘性、時間積分、時間刻み幅
 - ツリー法による自己重力計算

2. 実習パート

- 実習で使うコードについての短いお話
- 実行について (CfCAマニュアル)
- テスト
 - 1D shocktube test
 - 2D hydrostatic equilibrium test
 - 2D Kelvin-Helmholtz instability test
 - 2D Rayleigh-Taylor instability test
 - 3D Sedov-Taylor test
 - 2D Keplerian disk test
 - 2D barred galaxy test
 - 3D Evrard test

3. 参考文献

理論パート

PART I

Contents

1. 理論パート

– SPH の原理

- Standard SPH
- Density independent SPH

– その他

- 人工粘性、時間積分、時間刻み幅
- ツリー法による自己重力計算

2. 実習パート

– 実習で使うコードについての短いお話

– 実行について (CfCAマニュアル)

– テスト

- 1D shocktube test
- 2D hydrostatic equilibrium test
- 2D Kelvin-Helmholtz instability test
- 2D Rayleigh-Taylor instability test
- 3D Sedov-Taylor test
- 2D Keplerian disk test
- 2D barred galaxy test
- 3D Evrard test

3. 参考文献

Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH) 法とは？

- SPH 法は圧縮性流体を扱うラグランジュ法の一つ
 - Lucy (1977), Gingold & Monaghan (1977) によって開発された
 - 流体素片の進化を解く
 - ある点における物理量は畳み込みによって評価する



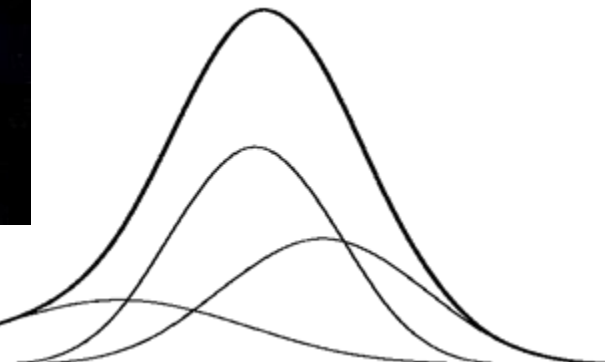
Muller+' 03 SIGGRAPH

~cm scale



Saitoh et al.

~10²²cm scale



シミュレーション：馬場淳一、可視化：中山弘敬

<http://4d2u.nao.ac.jp/t/var/download/MWJourney.html>

SPH 法の利点/欠点

- 利点
 - ガリレイ不変
 - ダイナミックレンジの大きな天文学の問題に適している
 - 高密度領域で高分解能
- 欠点
 - 低精度
 - 場の量を表現するのが苦手
 - ショックの分解能が低い

圧縮性流体の基礎方程式

- Continuity equation $\frac{d\rho}{dt} = -\rho \nabla \cdot \mathbf{v}$

- Momentum equation $\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{\nabla P}{\rho}$

- Energy equation $\frac{du}{dt} = -\frac{P}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{v}$

- Equation of state $P = (\gamma - 1)\rho u$

ここで $\frac{d}{dt}$ は $\frac{D}{Dt}$ のこと

カーネル近似

- ある点 x にある物理量 f は次のように表される

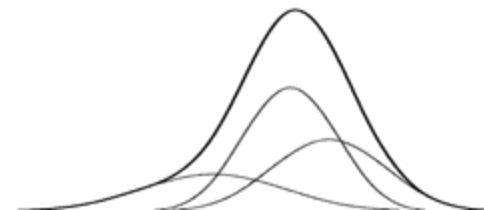
$$f(\mathbf{r}) = \int f(\mathbf{r}') \delta(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) d\mathbf{r}'$$

- カーネル近似を適用すると

$$f(\mathbf{r}) = \int f(\mathbf{r}') W(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, h) d\mathbf{r}'$$

となる

- ここで W はコンパクトサポート関数で、サイズ $h \rightarrow 0$ でデルタ関数に戻る



空間微分の表現

$$\begin{aligned}\nabla f(\mathbf{r}) &= \int \nabla_{\mathbf{r}'} f(\mathbf{r}') W(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, h) d\mathbf{r}' \\ &= \left[f(\mathbf{r}') W(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, h) \right]_{-\infty}^{\infty} \\ &\quad - \int f(\mathbf{r}') \nabla_{\mathbf{r}'} W(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, h) d\mathbf{r}' \\ &= \int f(\mathbf{r}') \nabla_{\mathbf{r}} W(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, h) d\mathbf{r}'\end{aligned}$$

これとは異なる評価方法については後ほど

カーネル関数

- カーネル関数が満たすべき性質
 1. 規格化されている
 2. コンパクトサポート
 3. $h \rightarrow 0$ の極限で δ 関数に還元される
- 次のキュービックスプライン関数がよく使われる

$$W(r_{ij}, h) = \frac{\sigma_D}{h^D} \begin{cases} 1 - 3s^2/2 + 3s^3/4 & (0 \leq s < 1) \\ (2 - s)^3/4 & (1 \leq s < 2) \\ 0 & \end{cases} \quad s = r_{ij}/h$$

$$\sigma_1 = 2/3, \sigma_2 = 10/7\pi, \sigma_3 = 1/\pi$$

カーネル関数のバリエーション

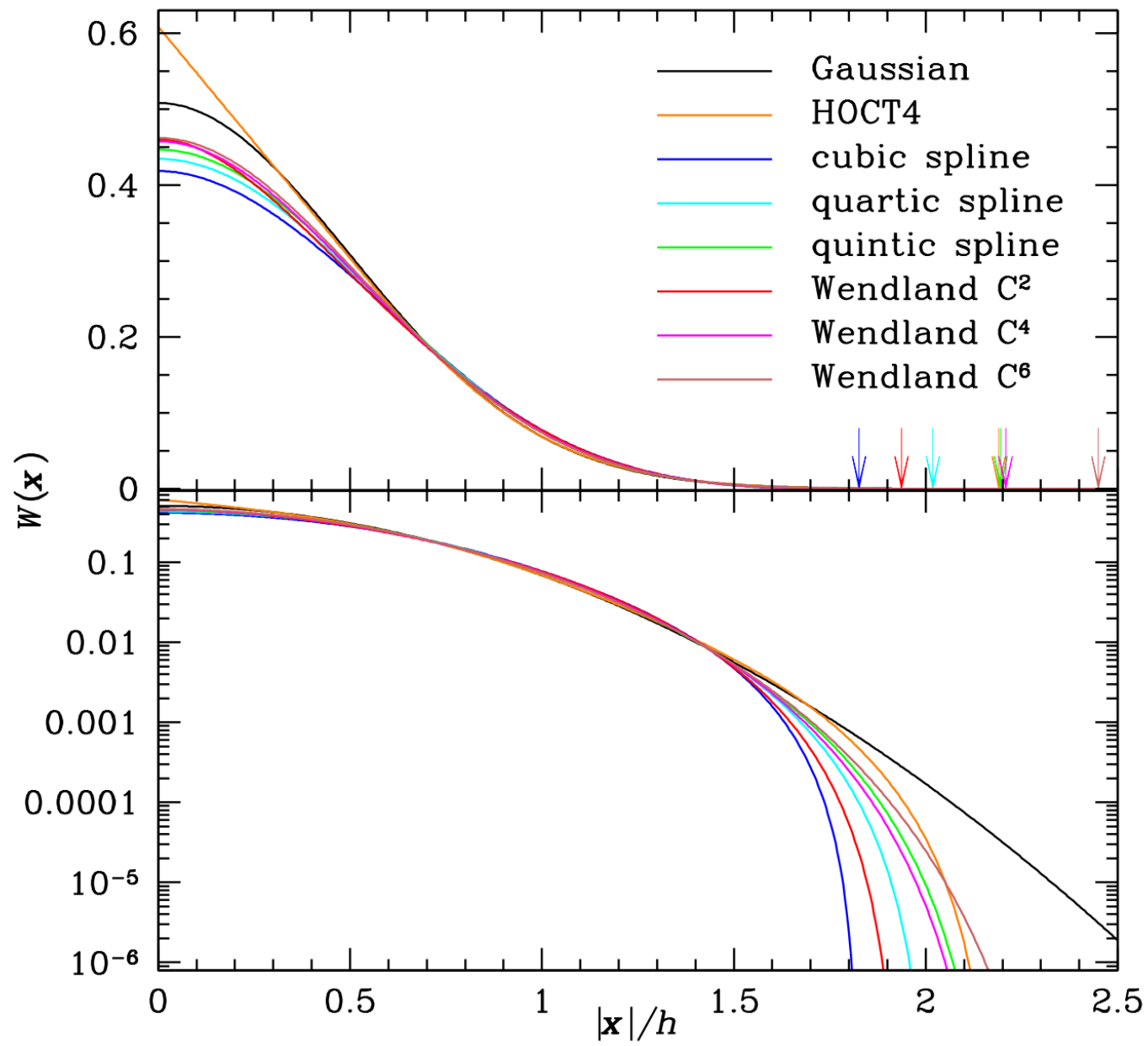
- スプライン関数の他にも様々、最近よく使われるものとして Wendland シリーズ (See Dehnen & Aly 2012)
 - Pairing instability が生じづらいという性質

kernel name	kernel function	C			σ^2/H^2			H/h		
		$\nu=1$	$\nu=2$	$\nu=3$	$\nu=1$	$\nu=2$	$\nu=3$	$\nu=1$	$\nu=2$	$\nu=3$
cubic spline	$b_4 = (1-r)_+^3 - 4(\frac{1}{2}-r)_+^3$	$\frac{8}{3}$	$\frac{80}{7\pi}$	$\frac{16}{\pi}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{31}{392}$	$\frac{3}{40}$	1.732051	1.778002	1.825742
quartic spline	$b_5 = (1-r)_+^4 - 5(\frac{3}{5}-r)_+^4 + 10(\frac{1}{5}-r)_+^4$	$\frac{5^5}{768}$	$\frac{5^6 3}{2398\pi}$	$\frac{5^6}{512\pi}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{9759}{152600}$	$\frac{23}{375}$	1.936492	1.977173	2.018932
quintic spline	$b_6 = (1-r)_+^5 - 6(\frac{2}{3}-r)_+^5 + 15(\frac{1}{3}-r)_+^5$	$\frac{3^5}{40}$	$\frac{3^7 7}{478\pi}$	$\frac{3^7}{40\pi}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{2771}{51624}$	$\frac{7}{135}$	2.121321	2.158131	2.195775
Wendland $C^2, \nu=1$	$\psi_{2,1} = (1-r)_+^3(1+3r)$	$\frac{5}{4}$	—	—	$\frac{2}{21}$	—	—	1.620185	—	—
Wendland $C^4, \nu=1$	$\psi_{3,2} = (1-r)_+^5(1+5r+8r^2)$	$\frac{3}{2}$	—	—	$\frac{1}{15}$	—	—	1.936492	—	—
Wendland $C^6, \nu=1$	$\psi_{4,3} = (1-r)_+^7(1+7r+19r^2+21r^3)$	$\frac{55}{32}$	—	—	$\frac{2}{39}$	—	—	2.207940	—	—
Wendland $C^2, \nu=2,3$	$\psi_{3,1} = (1-r)_+^4(1+4r)$	—	$\frac{7}{\pi}$	$\frac{21}{2\pi}$	—	$\frac{5}{72}$	$\frac{1}{15}$	—	1.897367	1.936492
Wendland $C^4, \nu=2,3$	$\psi_{4,2} = (1-r)_+^6(1+6r+\frac{35}{3}r^2)$	—	$\frac{9}{\pi}$	$\frac{495}{32\pi}$	—	$\frac{7}{132}$	$\frac{2}{39}$	—	2.171239	2.207940
Wendland $C^6, \nu=2,3$	$\psi_{5,3} = (1-r)_+^8(1+8r+25r^2+32r^3)$	—	$\frac{78}{7\pi}$	$\frac{1365}{64\pi}$	—	$\frac{3}{70}$	$\frac{1}{24}$	—	2.415230	2.449490

Table 1. Functional forms and various quantities for the B-splines (equation 11) and Wendland functions (equation 12) in $\nu = 1-3$ spatial dimensions. $(\cdot)_+ \equiv \max\{0, \cdot\}$. C is the normalisation constant, σ the standard deviation (equation 8), and $h = 2\sigma$ the smoothing scale. Note that the Wendland functions of given differentiability are identical for $\nu=2$ and $\nu=3$ but differ from those for $\nu=1$. $\psi_{2,1}$ (the C^2 Wendland function in 1D) has already been used in the second SPH paper ever (Lucy 1977), but for 3D simulations, when it is not a Wendland function.

カーネル関数のバリエーション

Dehnen & Aly 2012



空間精度

- f のテイラー展開をカーネル近似を適用した式に代入する

$$\langle f(\mathbf{r}) \rangle = \int \underline{f(\mathbf{r}')} W(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, h) d\mathbf{r}'$$

$$f(\mathbf{r}') = f(\mathbf{r}) + \nabla f(\mathbf{r})(\mathbf{r} - \mathbf{r}') + \frac{1}{2} \nabla^2 f(\mathbf{r})(\mathbf{r} - \mathbf{r}')^2 \dots$$

- カーネル関数が偶関数であれば

$$\langle f(\mathbf{r}) \rangle = f(\mathbf{r}) + \frac{1}{2} \nabla^2 f(\mathbf{r}) \int W(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, h) (\mathbf{r} - \mathbf{r}')^2 d\mathbf{r}' + \dots$$

となり、SPH は空間二次精度

- ただしそもそも一般に SPH 近似の下で

$$1 \neq \int W(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, h) d\mathbf{r}'$$

SPH の基礎方程式

- カーネル近似を用いた式を体積要素 $dr' = m/\rho$ を用いて離散化する

$$f_i = \sum_j m_j \frac{f_j}{\rho_j} W(r_{ij}, h)$$

- f に密度 ρ を入れると

$$\rho_i = \sum_j m_j W(r_{ij}, h)$$

標準 SPH ではこの密度を用いてすべての物理量を導出する

運動方程式(1)

- ラグランジアン:

$$L = \sum_j \frac{1}{2} m_j v_j^2 - \sum_j m_j u_j$$

$$= \sum_j \frac{1}{2} m_j v_j^2 - \frac{1}{\gamma - 1} \sum_j m_j A_j \rho_j^{\gamma-1}$$


$$\mathbf{r} = (r_1, r_2, \dots, r_N, h_1, h_2, \dots, h_N)$$

- 拘束条件:

$$\phi_i = \frac{4\pi}{3} \frac{\rho_i}{m_i} (2h_i)^3 - N_{\text{ngb}} = 0$$

$$P = (\gamma - 1) \rho u$$

$$P = A(s) \rho^\gamma$$


$$u = \frac{A(s)}{(\gamma - 1)} \rho^{\gamma-1}$$

運動方程式(2)

- オイラー=ラグランジュ方程式:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v_i} - \frac{\partial L}{\partial r_i} = \sum_j \lambda_j \frac{\partial \phi_j}{\partial r_i}$$

$$L = \sum_j \frac{1}{2} m_j v_j^2 - \frac{1}{\gamma - 1} \sum_j m_j A_j \rho_j^{\gamma-1}$$

$$\phi_i = \frac{4\pi}{3} \frac{\rho_i}{m_i} (2h_i)^3 - N_{\text{ngb}} = 0$$

運動方程式(3)

- 後ろ半分 (h_1, h_2, \dots, h_N) について解くと、

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v_i} - \frac{\partial L}{\partial r_i} &= \sum_j \lambda_j \frac{\partial \phi_j}{\partial r_i} \\
 - \frac{\partial L}{\partial h_i} &= \sum_j \lambda_j \frac{\partial \phi_j}{\partial h_i} \\
 = - \frac{\partial}{\partial h_i} \frac{1}{\gamma - 1} \sum_j m_j A_j \rho_j^{\gamma-1} &= \sum_j \lambda_j \frac{\partial}{\partial h_i} \left(\frac{4\pi}{3} \frac{\rho_j}{m_j} (2h_j)^3 - N_{\text{ngb}} \right) \\
 = m_i A_i \rho_i^{\gamma-2} \frac{\partial \rho_i}{\partial h_i} &= \lambda_i \left(32\pi h_i^2 \frac{\rho_i}{m_i} + \frac{32}{3} h_i^3 \frac{\partial \rho_i}{\partial h_i} \frac{1}{m_i} \right) \\
 = m_i \frac{P_i}{\rho_i^2} \frac{\partial \rho_i}{\partial h_i} &
 \end{aligned}$$

運動方程式(4)

- 先ほどの二つの式から

$$\begin{aligned} m_i \frac{P_i}{\rho_i^2} \frac{\partial \rho_i}{\partial h_i} &= \lambda_i \left(32\pi h_i^2 \frac{\rho_i}{m_i} + \frac{32}{3} h_i^3 \frac{\partial \rho_i}{\partial h_i} \frac{1}{m_i} \right) \\ &= \lambda_i 32\pi h_i^2 \frac{\rho_i}{m_i} \left(1 + \frac{h_i}{3\rho_i} \frac{\partial \rho_i}{\partial h_i} \right) \end{aligned}$$

- λ について解くと、

$$\begin{aligned} \lambda_i &= \frac{\frac{P_i}{\rho_i^2} \frac{\partial \rho_i}{\partial h_i}}{32\pi h_i^2 \frac{\rho_i}{m_i} \left(1 + \frac{h_i}{3\rho_i} \frac{\partial \rho_i}{\partial h_i} \right)} \\ &= \frac{m_i P_i}{32\pi h_i^2 \rho_i^3} \frac{\partial \rho_i}{\partial h_i} \left(1 + \frac{h_i}{3\rho_i} \frac{\partial \rho_i}{\partial h_i} \right)^{-1} \\ &= \frac{P_i}{\rho_i^2} \frac{3m_i}{32\pi h_i^3} \phi_i \qquad \phi_i = \frac{h_i}{3\rho_i} \frac{\partial \rho_i}{\partial h_i} \left(1 + \frac{h_i}{3\rho_i} \frac{\partial \rho_i}{\partial h_i} \right)^{-1} \end{aligned}$$

運動方程式(5)

- 前半半分 (r_1, r_2, \dots, r_N) について解く

$$\begin{aligned}
 m_i \frac{dv_i}{dt} &= -\frac{\partial}{\partial r_i} \frac{1}{\gamma - 1} \sum_j m_j A_j \rho_j^{\gamma-1} + \sum_j \lambda_j \frac{\partial \phi_j}{\partial r_i} \\
 &= -\sum_j m_j A_j \rho_j^{\gamma-2} \nabla_i \rho_j + \sum_j m_j \frac{P_j}{\rho_j^2} \frac{3m_j}{32\pi h_j^3} \phi_j \frac{\partial}{\partial r_i} \left(\frac{4\pi}{3} (2h_j)^3 \frac{\rho_j}{m_j} - N_{\text{ngb}} \right) \\
 &= -\sum_j m_j \frac{P_j}{\rho_j^2} \nabla_i \rho_j + \sum_j m_j \frac{P_j}{\rho_j^2} \frac{3m_j}{32\pi h_j^3} \phi_j \left(\frac{32\pi}{3} \frac{h_j^3}{m_j} \nabla_i \rho_j \right) \\
 &= -\sum_j m_j \frac{P_j}{\rho_j^2} (1 - \phi_j) \nabla_i \rho_j \\
 &= -\sum_j m_j \frac{P_j}{\rho_j^2} \left(1 + \frac{h_j}{3\rho_j} \frac{\partial \rho_j}{\partial h_j} \right)^{-1} \nabla_i \rho_j = -\sum_j m_j \frac{P_j}{\rho_j^2} f_j \nabla_i \rho_j
 \end{aligned}$$

運動方程式(6)

- $$\begin{aligned}\nabla_i \rho_j &= \nabla_i \sum_k m_k W_{jk}(h_j) \\ &= m_i \nabla_i W_{ij}(h_j) + \delta_{ij} \sum_k m_k \nabla_i W_{ik}(h_i)\end{aligned}$$

- お疲れ様でした

$$\begin{aligned}m_i \frac{dv_i}{dt} &= - \sum_j m_j \frac{P_j}{\rho_j^2} f_j \left(m_i \nabla_i W_{ij}(h_j) + \delta_{ij} \sum_k m_k \nabla_i W_{ik}(h_i) \right) \\ &= - \sum_j m_i m_j \left(\frac{P_i}{\rho_i^2} f_i \nabla_i W_{ij}(h_i) + \frac{P_j}{\rho_j^2} f_j \nabla_i W_{ij}(h_j) \right)\end{aligned}$$

エネルギー方程式(1)

- 独立な熱力学変数として内部エネルギーを用いるとエネルギー方程式が必要になる
- エネルギー方程式は、熱力学第一法則を通じて導出できる

$$dU = -PdV \longrightarrow \frac{dU_i}{dt} = -P_i \frac{dV_i}{dt} \\ = m_i \frac{P_i}{\rho_i^2} \frac{d\rho_i}{dt}$$

エネルギー方程式(2)

- 密度の時間微分:

$$\frac{d\rho_i}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_j m_j W_{ij}(h_i)$$

$$= \sum_j m_j \frac{dr_{ij}}{dt} \frac{\partial W_{ij}(h_i)}{\partial r_{ij}} + \sum_j m_j \frac{dh_i}{dt} \frac{\partial W_{ij}(h_i)}{\partial h_i}$$

$$= \sum_j m_j v_{ij} \frac{\partial W_{ij}(h_i)}{\partial r_{ij}} + \frac{dh_i}{d\rho_i} \frac{d\rho_i}{dt} \sum_j m_j \frac{\partial W_{ij}(h_i)}{\partial h_i}$$

- 整理すると

$$\left(1 - \frac{dh_i}{d\rho_i} \sum_j m_j \frac{\partial W_{ij}(h_i)}{\partial h_i} \right) \frac{d\rho_i}{dt} = \left(1 + \frac{h_i}{3\rho_i} \sum_j m_j \frac{\partial W_{ij}(h_i)}{\partial h_i} \right) \frac{d\rho_i}{dt}$$
$$= \left(1 + \frac{h_i}{3\rho_i} \frac{\partial \rho_i}{\partial h_i} \right) \frac{d\rho_i}{dt} = \sum_j m_j v_{ij} \nabla_i W_{ij}(h_i)$$

エネルギー方程式(3)

- もうちょっと整理する

$$\begin{aligned}\frac{d\rho_i}{dt} &= \left(1 + \frac{h_i}{3\rho_i} \frac{\partial \rho_i}{\partial h_i}\right)^{-1} \sum_j m_j \mathbf{v}_{ij} \cdot \nabla_i W_{ij}(h_i) \\ &= f_i \sum_j m_j \mathbf{v}_{ij} \cdot \nabla_i W_{ij}(h_i)\end{aligned}$$

- 最終的に次の式を得る

$$\frac{dU_i}{dt} = m_i \frac{P_i}{\rho_i^2} f_i \sum_j m_j \mathbf{v}_{ij} \cdot \nabla_i W_{ij}(h_i)$$

SPH 方程式のまとめ

$$\rho_i = \sum_j m_j W(r_{ij}, h)$$

$$m_i \frac{dv_i}{dt} = - \sum_j m_i m_j \left(\frac{P_i}{\rho_i^2} f_i \nabla_i W_{ij}(h_i) + \frac{P_j}{\rho_j^2} f_j \nabla_i W_{ij}(h_j) \right)$$

$$\frac{dU_i}{dt} = m_i \frac{P_i}{\rho_i^2} f_i \sum_j m_j \mathbf{v}_{ij} \cdot \nabla_i W_{ij}(h_i)$$

$$f_i = \left(1 + \frac{h_i}{3\rho_i} \frac{\partial \rho_i}{\partial h_i} \right)^{-1}$$

Other SPH eqs. (I)

- 次の拘束条件の場合: $\phi_i = \frac{4\pi}{3}n_i(2h_i)^3 - N_{\text{ngb}} = 0$

$$\rho_i = \sum_j m_j W(r_{ij}, h)$$

$$m_i \frac{dv_i}{dt} = - \sum_j m_i m_j \left(\frac{P_i}{\rho_i^2} f_{ij} \nabla_i W_{ij}(h_i) + \frac{P_j}{\rho_j^2} f_{ji} \nabla_i W_{ij}(h_j) \right)$$

$$\frac{dU_i}{dt} = m_i \frac{P_i}{\rho_i^2} \sum_j m_j f_{ij} \mathbf{v}_{ij} \cdot \nabla_i W_{ij}(h_i)$$

$$f_{ij} = 1 - \frac{h_i}{3m_j n_i} \frac{\partial \rho_i}{\partial h_i} \left(1 + \frac{h_i}{3n_i} \frac{\partial n_i}{\partial h_i} \right)^{-1}$$

Other SPH eqs. (2)

- 伝統的な(ヒューリスティックな)導出の場合

$$\rho_i = \sum_j m_j W(r_{ij}, h)$$

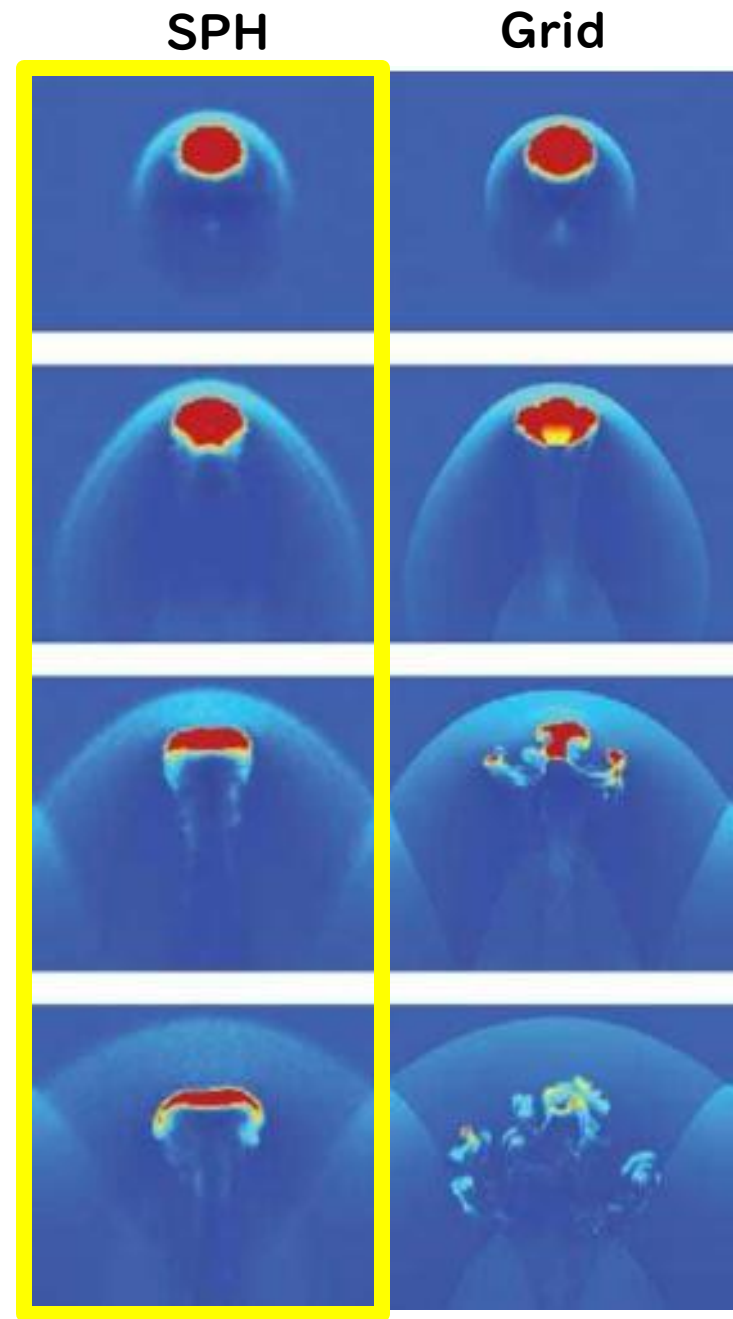
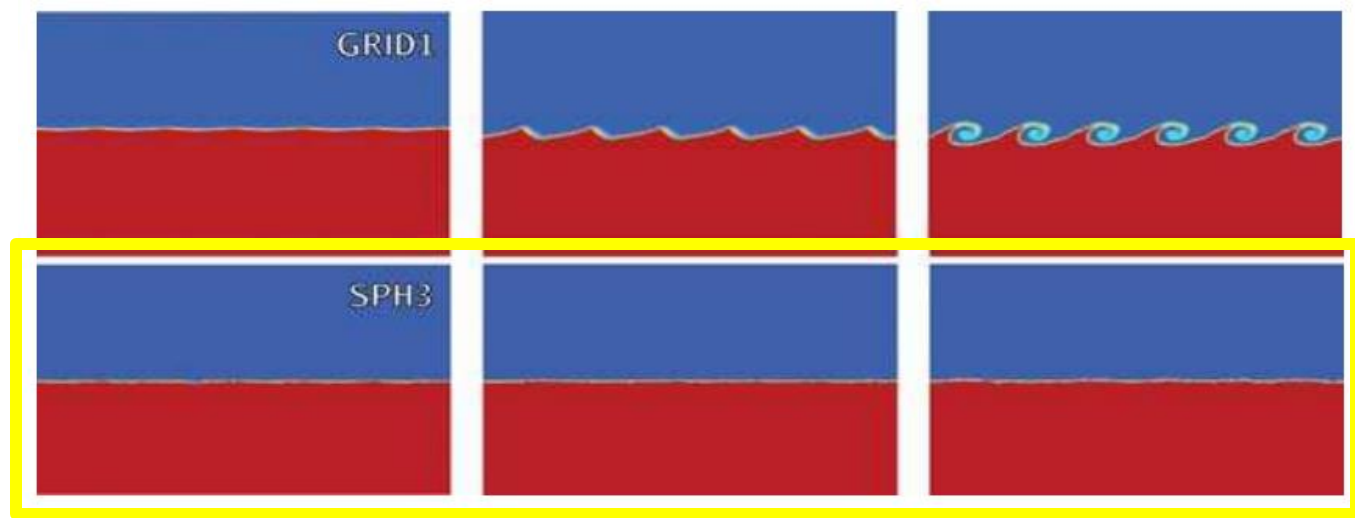
$$m_i \frac{dv_i}{dt} = - \sum_j m_i m_j \left(\frac{P_i}{\rho_i^2} + \frac{P_j}{\rho_j^2} \right) \nabla_i \tilde{W}_{ij}$$

$$\frac{dU_i}{dt} = m_i \frac{P_i}{\rho_i^2} \sum_j m_j \mathbf{v}_{ij} \cdot \nabla_i \tilde{W}_{ij}$$

$$\tilde{W}_{ij} = \frac{1}{2} \{W_{ij}(h_i) + W_{ij}(h_j)\}$$

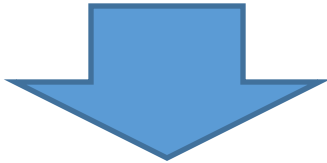
Problem in SPH

- SPH 法は接触不連続面を扱えない、その結果流体不安定性の成長を抑制してしまう
(Agertz+2007; Ritchie & Thomas 2001, Okamoto+2003)
 - 従来の SPH は密度の微分可能性を仮定しているから

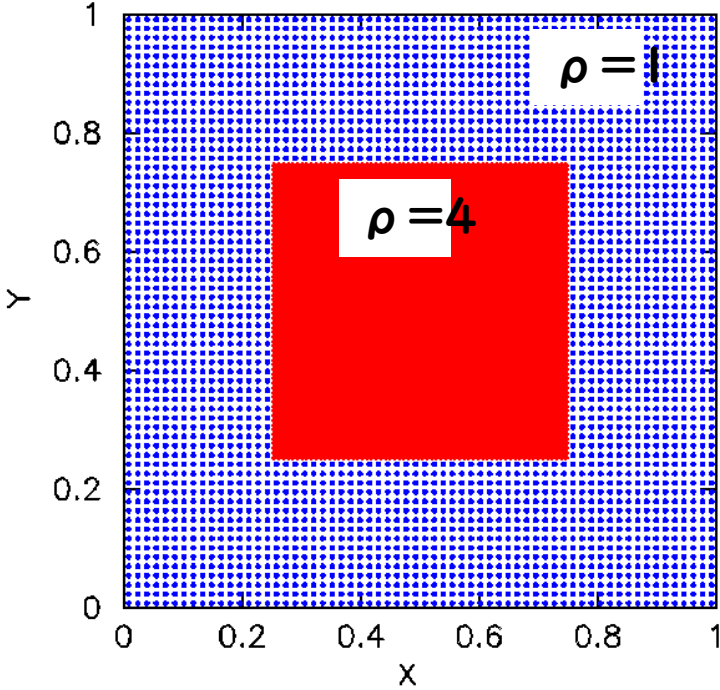


Hydrostatic Equilibrium test

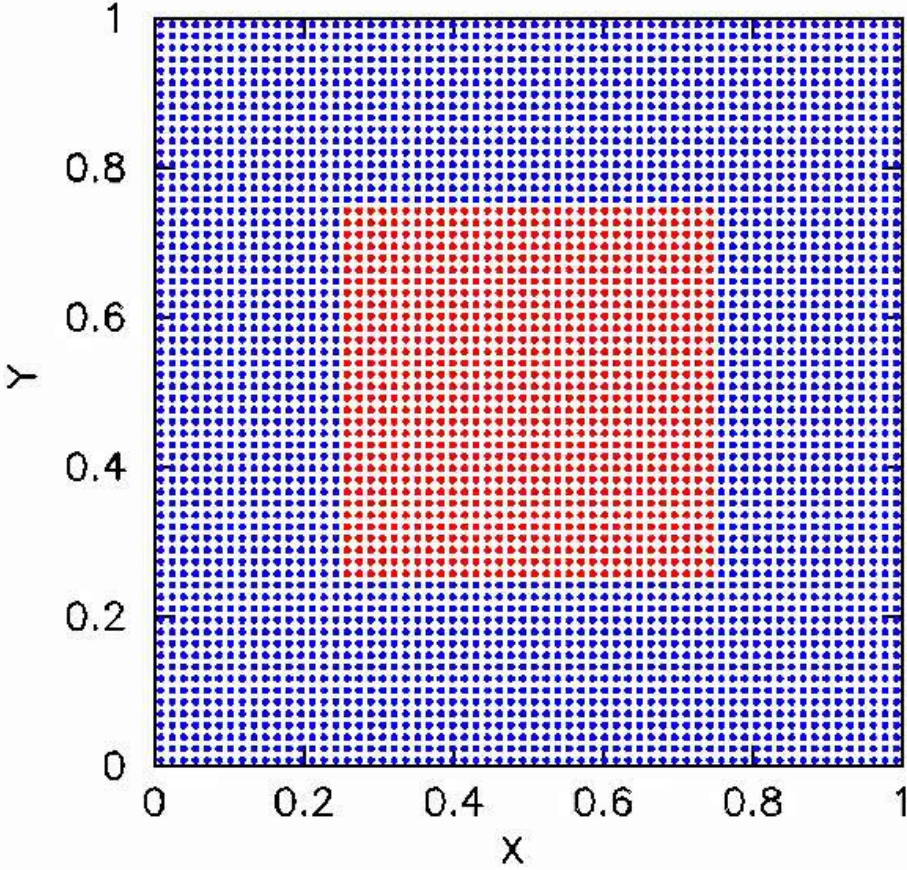
Initially hydrostatic equilibrium



$T = 0.00$

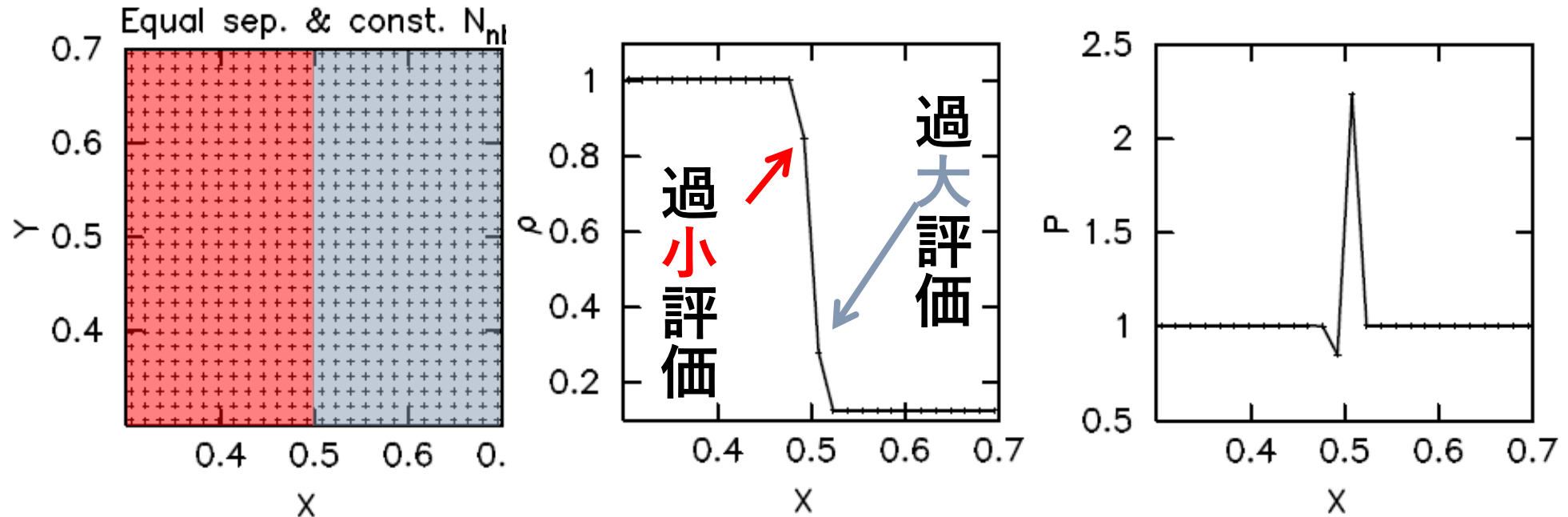


$T = 0.00$



接触不連続面における圧力の評価

密度8:1の接触不連続面、圧力=1(=一定)



- 接触不連続面の密度gap → 圧力エラー → 斥力となる
- 密度から他の物理量を求めるのに無理がある
 - 離散化からやり直す必要がある

Density Independent SPH

- 次の体積要素を定式化に用いる:

$$\Delta V_j = \frac{(\gamma - 1)m_j u_j}{P_j} = \frac{U_j}{q_j} \quad \begin{array}{l} U_j = m_j u_j \\ q_j = \rho_j u_j \end{array}$$

- 物理量 f は次のようになる

$$f_i = \sum_j f_j \frac{(\gamma - 1)m_j u_j}{P_j} W(r_{ij}, h_i)$$

- f に q を入れる:

$$q_i = \sum_j U_j W(r_{ij}, h_i)$$

理想気体では q は圧力に比例する ($P=(\gamma-1)q$)

運動方程式とエネルギー方程式

- 運動方程式

$$m_i \frac{dv_i}{dt} = -(\gamma - 1) \sum_j U_i U_j \left(\frac{f_i^{\text{grad}}}{q_i} \nabla_i W_{ij}(h_i) + \frac{f_j^{\text{grad}}}{q_j} \nabla_i W_{ij}(h_j) \right)$$

- エネルギー方程式

$$\frac{dU_i}{dt} = (\gamma - 1) \sum_j \frac{U_i U_j}{q_i} f_i^{\text{grad}} \mathbf{v}_{ij} \cdot \nabla_i W_{ij}(h_i)$$

$$P = (\gamma - 1) \rho u$$

$$f_i^{\text{grad}} = \left(1 + \frac{h_i}{3q_i} \frac{\partial q_i}{\partial h_i} \right)^{-1}$$

Other DISPH eqs. (I)

- 次の拘束条件の場合: $\phi_i = \frac{4\pi}{3}n_i(2h_i)^3 - N_{\text{ngb}} = 0$

$$q_i = \sum_j U_j W(r_{ij}, h)$$

$$m_i \frac{dv_i}{dt} = -(\gamma - 1) \sum_j U_i U_j \left(\frac{f_{ij}}{q_i} \nabla_i W_{ij}(h_i) + \frac{f_{ji}}{q_j} \nabla_i W_{ij}(h_j) \right)$$

$$\frac{dU_i}{dt} = (\gamma - 1) \sum_j \frac{U_i U_j}{q_i} f_{ij} \mathbf{v}_{ij} \cdot \nabla_i W_{ij}(h_i)$$

$$f_{ij} = 1 - \frac{h_i}{3U_j n_i} \frac{\partial q_i}{\partial h_i} \left(1 + \frac{h_i}{3n_i} \frac{\partial n_i}{\partial h_i} \right)^{-1}$$

Other DISPH eqs. (2)

- 伝統的な導出の場合

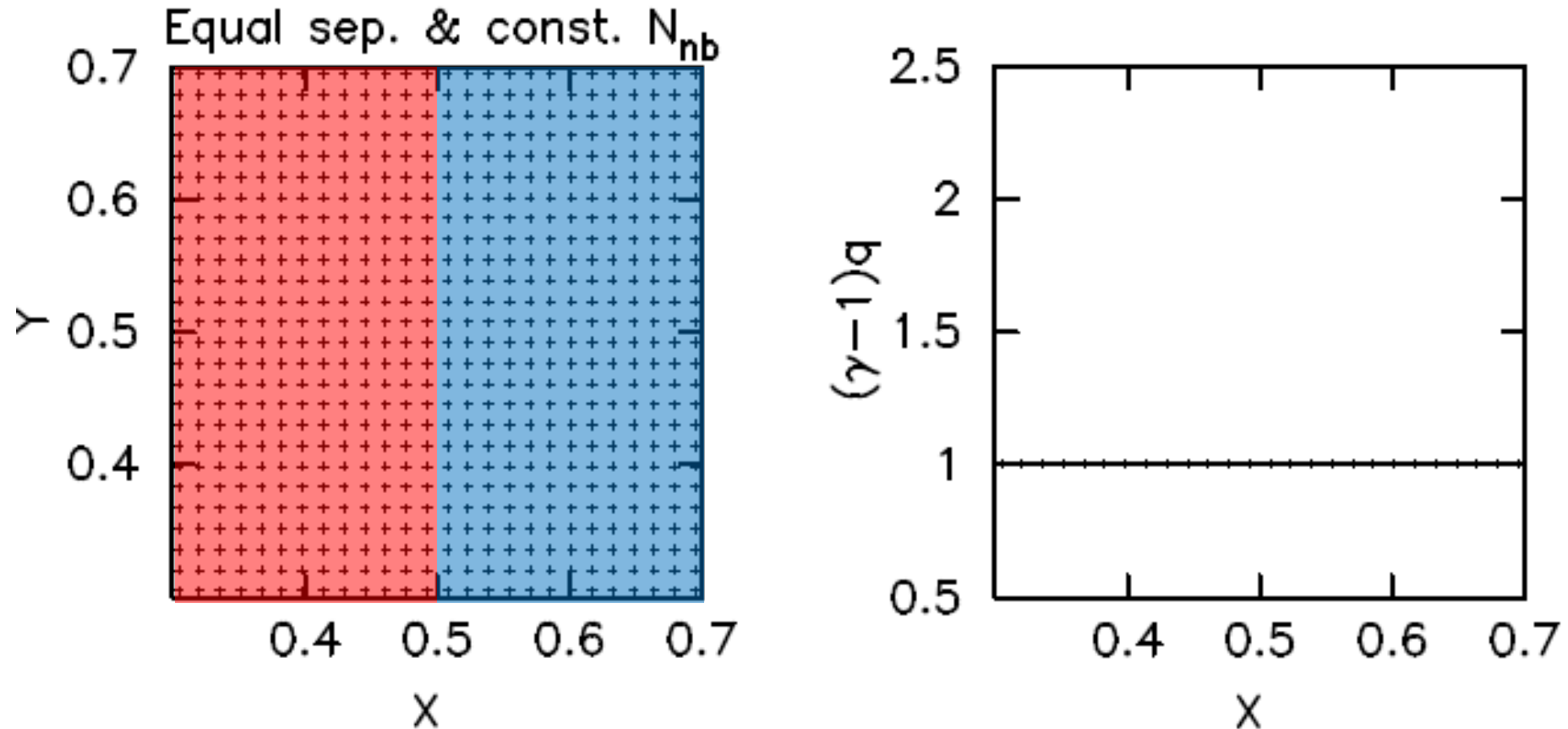
$$q_i = \sum_j U_j W(r_{ij}, h)$$

$$m_i \frac{dv_i}{dt} = -(\gamma - 1) \sum_j U_i U_j \left(\frac{1}{q_j} + \frac{1}{q_i} \right) \nabla_i \tilde{W}_{ij}$$

$$\frac{dU_i}{dt} = (\gamma - 1) \sum_j \frac{U_i U_j}{q_i} \mathbf{v}_{ij} \cdot \nabla_i \tilde{W}_{ij}$$

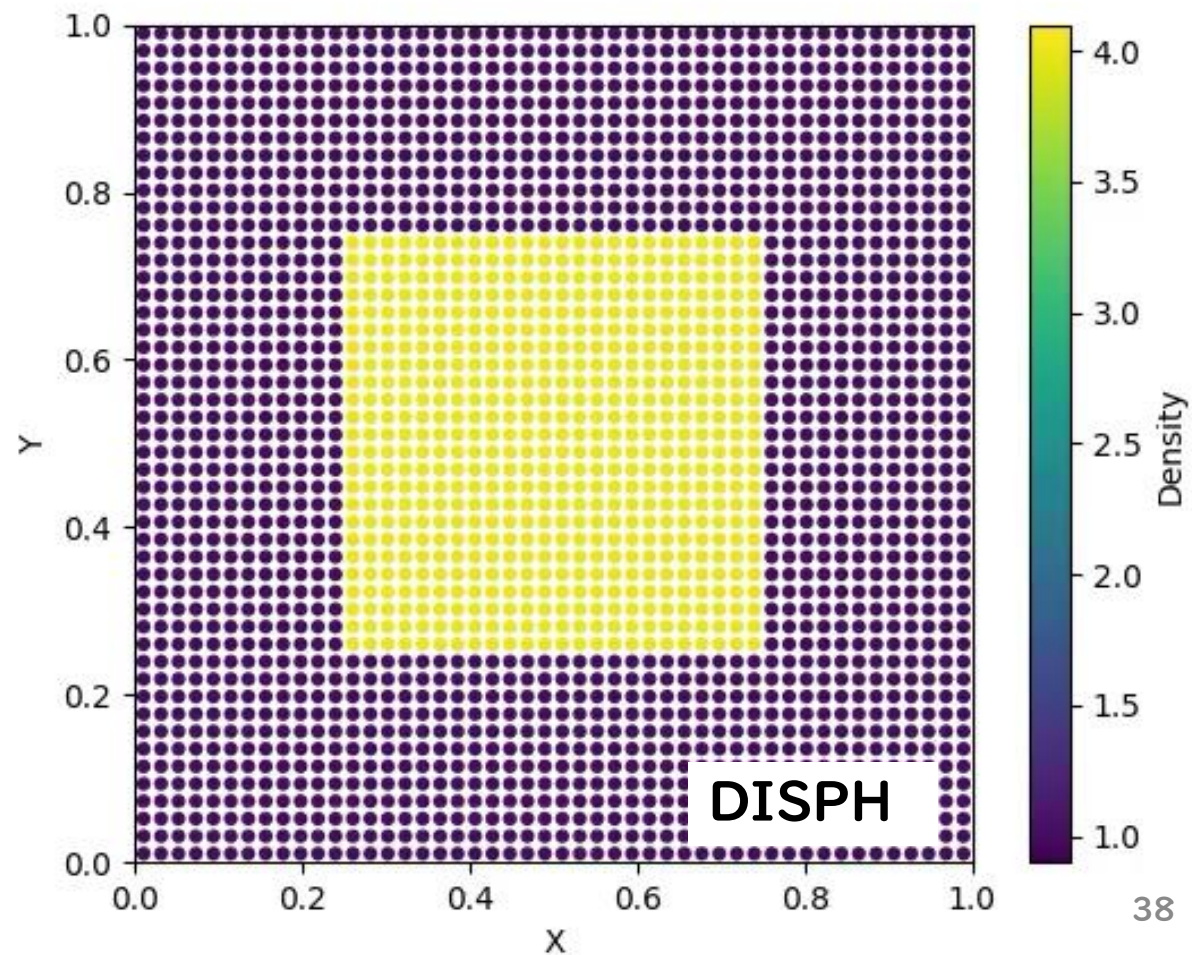
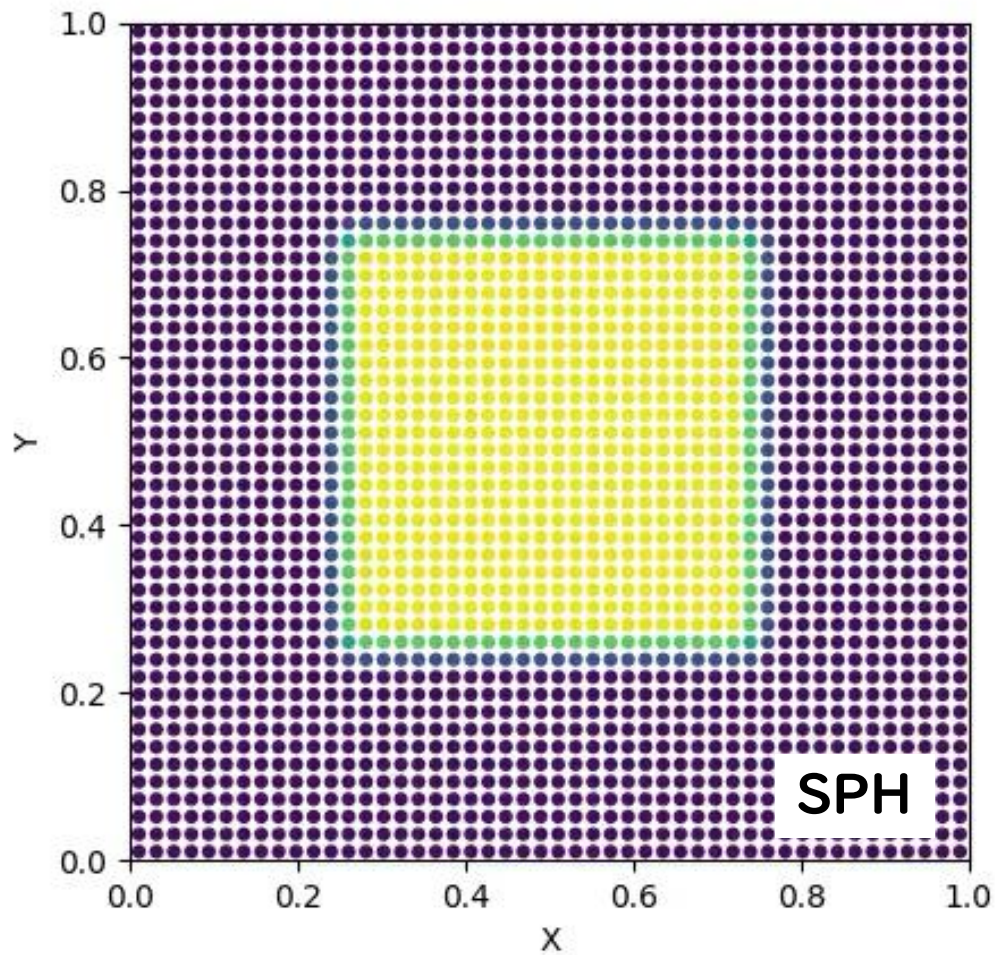
$$\tilde{W}_{ij} = \frac{1}{2} \{W_{ij}(h_i) + W_{ij}(h_j)\}$$

Pressure at Contact Discon. with DISPH

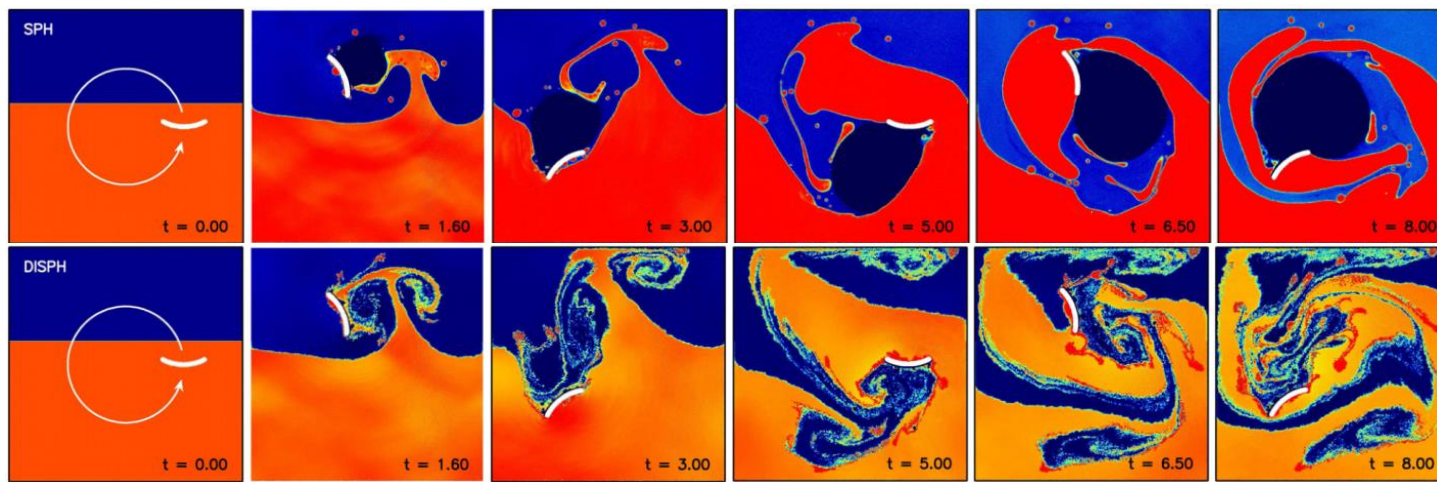
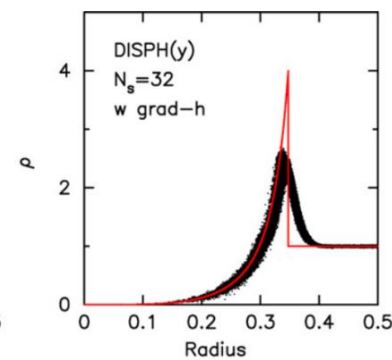
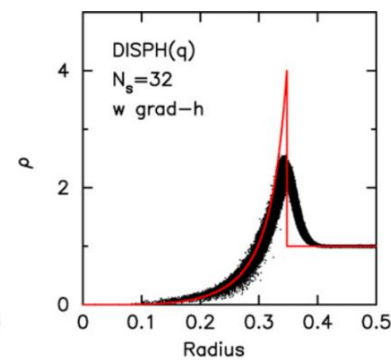
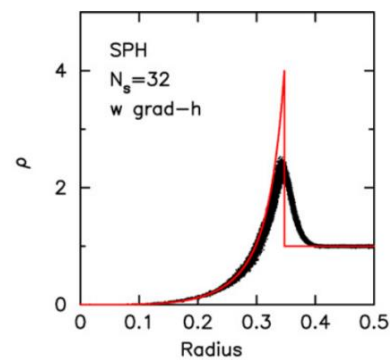
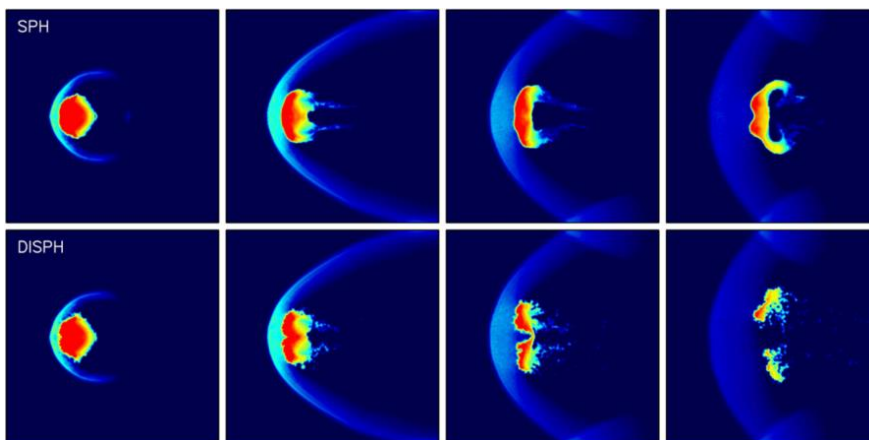
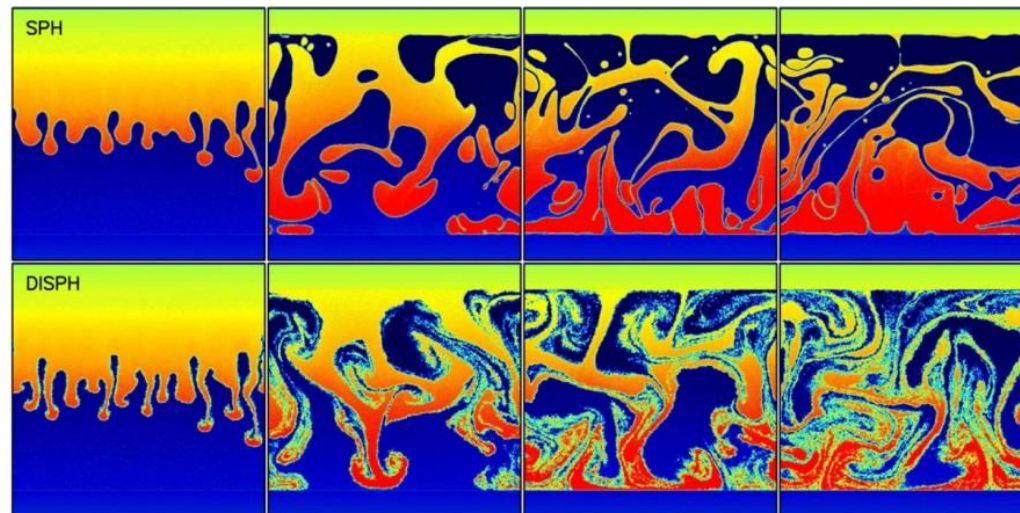
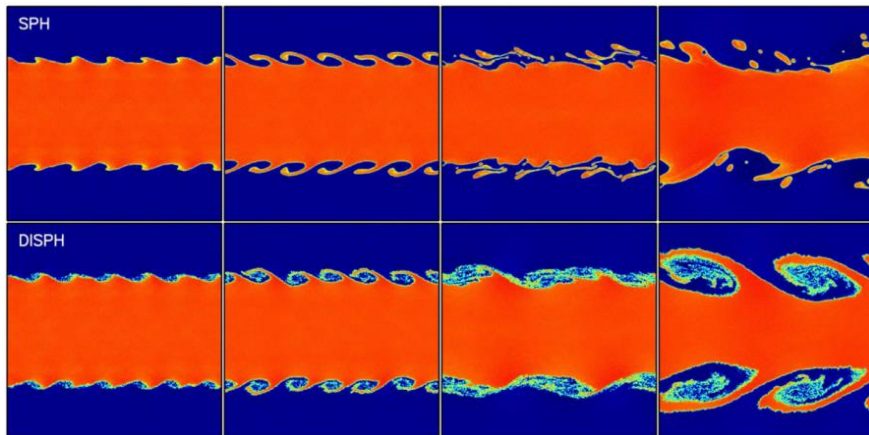


- DISPH では圧力をスムーズな物理量として用いる
- 接触不連続面での圧力はもちろんスムーズになる

Hydrostatic Equilibrium test



Tests



Generalized DISPH

- $q(= P/(\gamma - 1))$ の代わりに $y = P^\zeta$ をもちいる
 - $\zeta = 1$ のときオリジナルのDISPHに戻る
 - See Saitoh & Makino (2013)
-

DISPH for Non-ideal EOS

- 非理想状態方程式は地球惑星科学的応用をする上で重要になる (マントル、鉄コア etc.)
 - $P = P(\rho, u)$
- P そのものを基本量とする
- See Hosono, Saitoh and Makino (2013)

Contents

1. 理論パート

– SPH の原理

- Standard SPH
- Density independent SPH

– その他

- 人工粘性、時間積分、時間刻み幅
- ツリー法による自己重力計算

2. 実習パート

– 実習で使うコードについての短いお話

– 実行について (CfCAマニュアル)

– テスト

- 1D shocktube test
- 2D hydrostatic equilibrium test
- 2D Kelvin-Helmholtz instability test
- 2D Rayleigh-Taylor instability test
- 3D Sedov-Taylor test
- 2D Keplerian disk test
- 2D barred galaxy test
- 3D Evrard test

3. 参考文献

人工粘性(1)

- ショックを捉えるために人工粘性を導入する
- 最近よく使われるタイプ(Monaghan 1997)

$$\Pi_{ij} = \begin{cases} -\frac{\alpha}{2} \frac{v_{ij}^{\text{sig}}}{0.5(\rho_i + \rho_j)} \frac{\mathbf{v}_{ij} \cdot \mathbf{r}_{ij}}{r_{ij}} & \mathbf{v}_{ij} \cdot \mathbf{r}_{ij} < 0 \\ 0 & \mathbf{v}_{ij} \cdot \mathbf{r}_{ij} \geq 0 \end{cases}$$

※別なアプローチ

Godonov SPH (Inutuka 2002)

人工粘性(2)

- 運動方程式、エネルギー方程式には次の形で寄与する

$$m_i \frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2} = - \sum_j m_i m_j \Pi_{ij} \nabla \tilde{W}_{ij}$$

$$\frac{dU_i}{dt} = \frac{1}{2} \sum_j m_i m_j \Pi_{ij} \mathbf{v}_{ij} \cdot \nabla \tilde{W}_{ij}$$

人工粘性(3)

- von Neumann-Richtmyer-Landshoff 型人工粘性
(Monaghan & Gingold 1983; Hernquist & Katz 1989)

$$p_i = \begin{cases} -\alpha \rho_i c_i h_i (\nabla \cdot \mathbf{v})_i + \beta \rho_i h_i^2 (\nabla \cdot \mathbf{v})_i^2 & \mathbf{v}_{ij} \cdot \mathbf{r}_{ij} < 0 \\ 0 & \mathbf{v}_{ij} \cdot \mathbf{r}_{ij} \geq 0 \end{cases}$$

- 人工粘性項起源の圧力項を流体圧力に加える
- 一般に対称性を満たさないなので、うまくないことあり(運動方程式エネルギー方程式の形による)

人工粘性スイッチ

- ショックのないところで人工粘性がきかないようにしたいので粘性係数を変化させる (Morris & Monaghan 1997; Rosswog 2000; Cullen & Dehnen 2010)
- 割と簡単な Rosswog にしたかうと

$$\frac{d\alpha_i}{dt} = (\alpha_{\max} - \alpha_i) \max(-\nabla \cdot \mathbf{v}_i, 0) - \frac{\alpha_i - \alpha_{\min}}{\tau_i}$$

$$\tau_i = \frac{h_i}{c_i}$$

Balsara Limiter

- シアーで人工粘性がきかないようにしたい → Balsara Limiter (Balsara 1995):

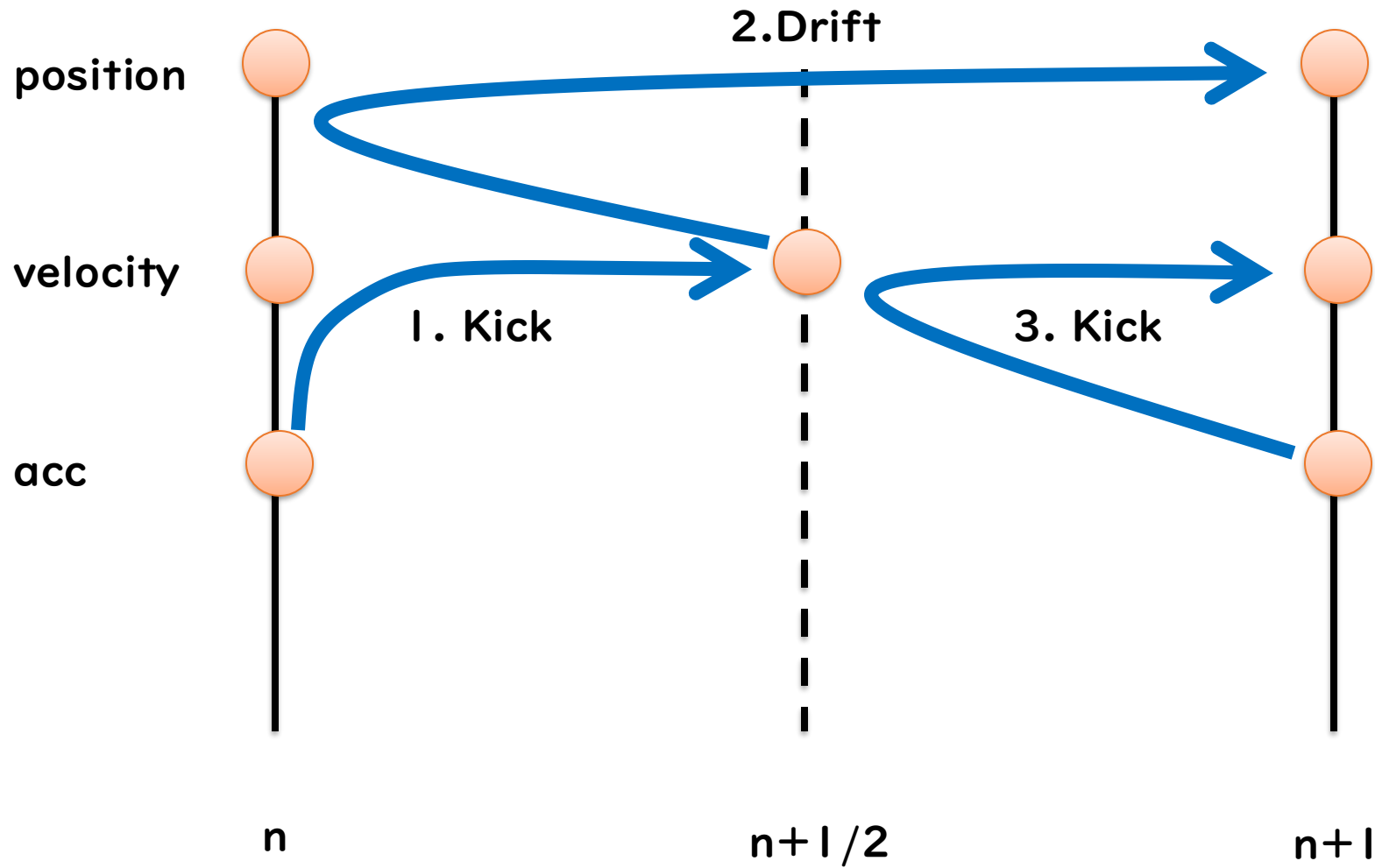
$$F_i^{\text{Balsara}} = \frac{|\nabla \cdot \mathbf{v}|}{|\nabla \cdot \mathbf{v}| + |\nabla \times \mathbf{v}| + \epsilon_b c s_i / h_i}$$

ここで $c s_i$ は音速、また $\epsilon_b = 10^{-4}$

- $\Pi_{ij} \rightarrow \Pi_{ij}^{\text{Balsara}}$:

$$\Pi_{ij}^{\text{Balsara}} = 0.5(F_i^{\text{Balsara}} + F_j^{\text{Balsara}})\Pi_{ij}$$

時間積分:Leapfrog



時間積分:Leapfrog

position

$$v^{n+1/2} = v^n + \frac{1}{2}a^n dt$$

velocity

$$x^{n+1} = x^n + v^{n+1/2} dt$$

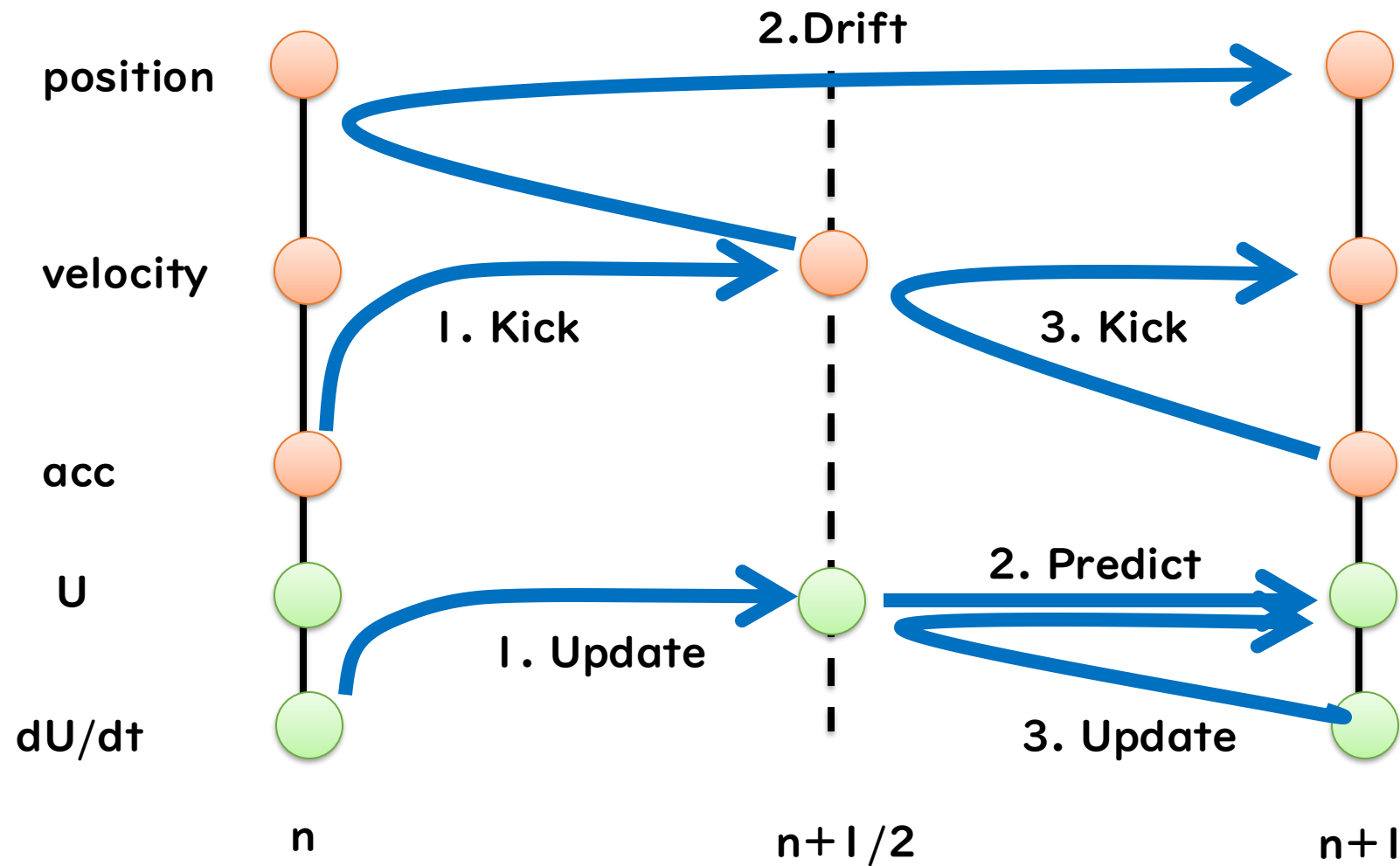
Acc

$$v^{n+1} = v^{n+1/2} + \frac{1}{2}a^{n+1} dt$$



$$x^{n+1} = x^n + v^n dt + \frac{1}{2}a^n dt^2$$

内部エネルギーの時間積分:ホイン法



内部エネルギーの時間積分:ホイン法

posit

$$U^{n+1/2} = U^n + \frac{1}{2} \left(\frac{dU}{dt} \right)^n dt$$

veloc

$$U_p^{n+1} = U^n + \left(\frac{dU}{dt} \right)^n dt$$

Acc

$$U^{n+1} = U^{n+1/2} + \frac{1}{2} \left(\frac{dU}{dt} \right)_p^{n+1} dt$$

U



du/dt

$$U^{n+1} = U^n + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{dU}{dt} \right)^n + \left(\frac{dU}{dt} \right)_p^{n+1} \right\} dt$$

Time step

- Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) 条件

$$dt_i^{\text{CFL}} = C^{\text{CFL}} \frac{2h_i}{\max_j v_{ij}^{\text{sig}}}$$

ここで $C^{\text{CFL}} \sim 0.3$ 、また

$$v_{ij}^{\text{sig}} = cs_i + cs_j - \beta^{\text{sig}} \frac{\mathbf{r}_{ij} \cdot \mathbf{v}_{ij}}{r_{ij}}$$

そして $B^{\text{sig}} \sim 3$

- 加速度条件

$$dt_i^{\text{acc}} = C^{\text{acc}} \sqrt{\frac{h_i}{a_i}} \quad C^{\text{acc}} \sim 0.3$$

- 併せて

$$dt = \min_i dt_i \quad dt_i = \min(dt_i^{\text{CFL}}, dt_i^{\text{acc}})$$

Kernel サイズ決定方法

- 主に二つ

- ネイバー数(相互作用する粒子数)一定

- 密度から推定: $h = \eta \left(\frac{m}{\rho} \right)^{1/D}$

- 近傍粒子探査にはツリー法 (Barnes & Hut 1986) がよく用いられる

ツリー法による自己重力計算

- 自己重力の直接的な計算量は $O(N^2)$

$$\frac{d^2 \mathbf{x}_i}{dt^2} = - \sum_{j \neq i, 1 \leq j \leq N} G m_j \frac{(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i)}{|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i|^3}$$

- 近接遭遇による発散を抑えるための重力ソフトニング ϵ の導入

$$\frac{d^2 \mathbf{x}_i}{dt^2} = - \sum_{j \neq i, 1 \leq j \leq N} G m_j \frac{(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i)}{|(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i)^2 + \epsilon^2|^{3/2}}$$

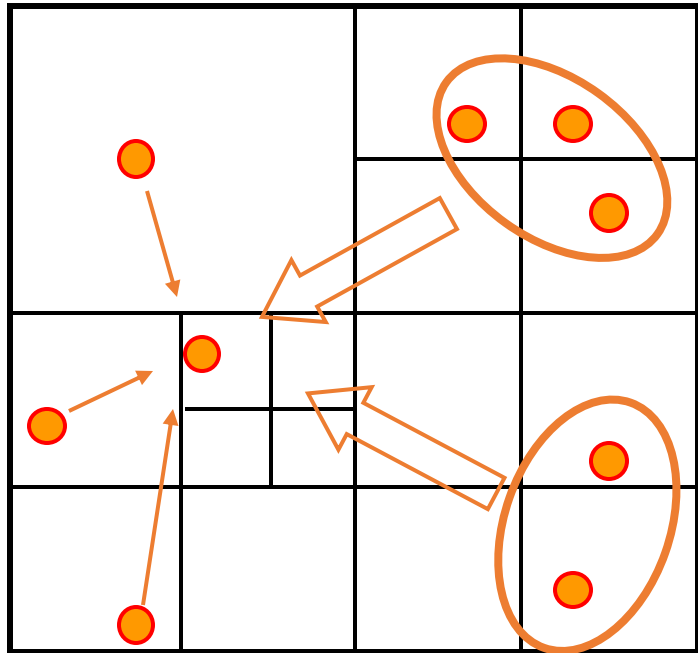
- Spline 化することもある (cf. Hernquist & Katz 1989)

重力計算

- 近似計算法
 - **Tree法**(Barnes & Hut 1986)、PM法(Hockney & Eastwood 1981)、TreePM法(Xu 1995)、FMM(Greengard & Rokhlin 1987; Dehnen 2000; Springel 2020)
- 専用計算機
 - GRAPE(Sugimoto et al. 1989)
- チューニングカーネル
 - Phantom-GRAPE(Nitadori et al. 2006; Tanikawa et al. 2013)
 - PIKG(野村)

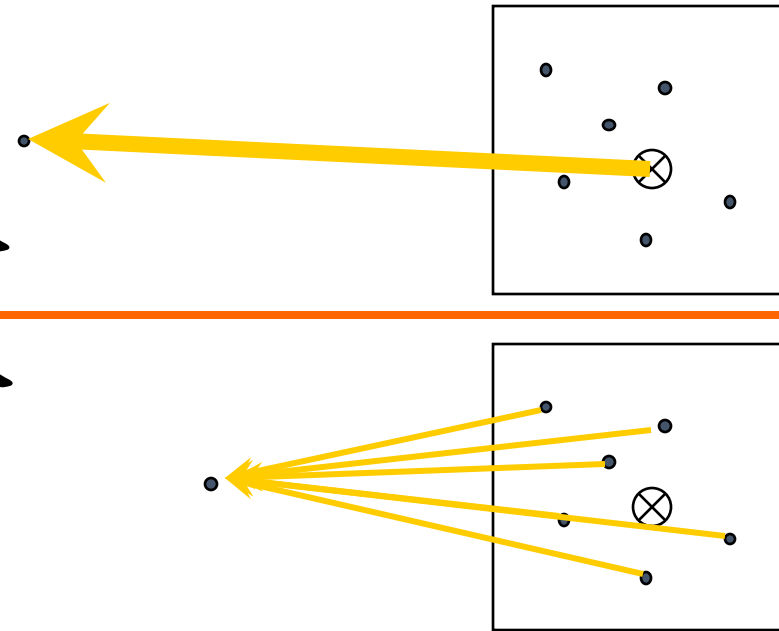
Tree法

- 遠くにある粒子の塊からの寄与
=重心(+多重極)(Appel 1985, Barnes & Hut 1986)



遠い場合

近い場合



- 遠いの判定; 重心までの距離 l 、箱の幅 w として

$$\frac{w}{l} < \theta$$

ここで θ は見込み角とよばれるもので、典型的には0.5程度の値をとる
小さい方が精度よくなる

実習パート

PART 2

Contents

1. 理論パート

– SPH の原理

- Standard SPH
- Density independent SPH

– その他

- 人工粘性、時間積分、時間刻み幅
- ツリー法による自己重力計算

2. 実習パート

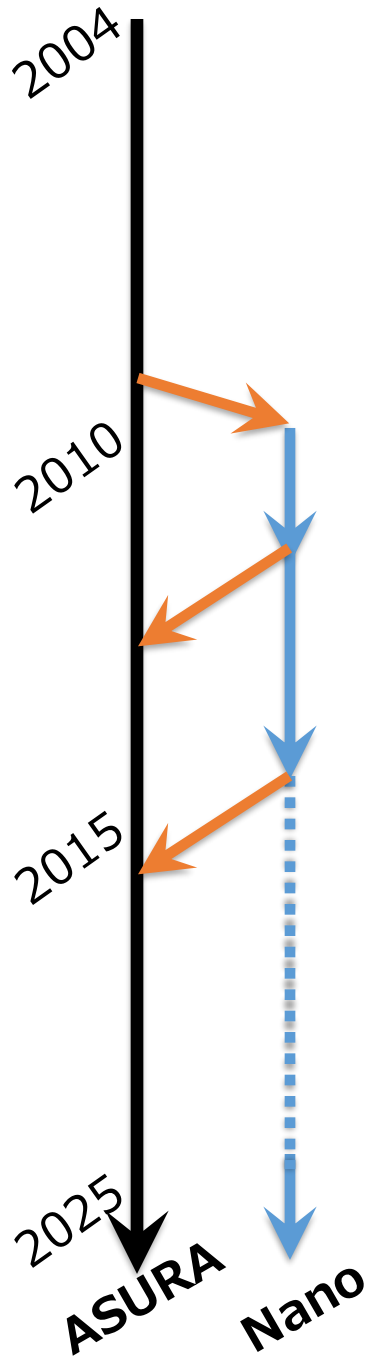
– 実習で使うコードについての短いお話

– 実行について (CfCAマニュアル)

– テスト

- 1D shocktube test
- 2D hydrostatic equilibrium test
- 2D Kelvin-Helmholtz instability test
- 2D Rayleigh-Taylor instability test
- 3D Sedov-Taylor test
- 2D Keplerian disk test
- 2D barred galaxy test
- 3D Evrard test

3. 参考文献



NanoASURA

- C 言語(C99)で書かれた SPH コード
 - ASURA は MPI 並列銀河形成シミュレーション用コード
 - NanoASURA は SPH 部分を切り出したもの
- 並列化は OpenMP
 - (たぶん)読みやすい
- パラメータファイルのフラグを変更するだけで DISPH/SSPH の比較が可能
- 標準的なベンチマークテストを持つ
- 可視化のためのツール(matplotlib-cを利用)も同梱
- 今回から自己重力計算ルーチンもついた

レポジトリ

https://bitbucket.org/tsaitoh/nanoasura

C NanoASURA

- ソース
- コミット
- ブランチ
- プルリクエスト
- パイプライン
- Deployments
- Jira issues
- セキュリティ
- Wiki
- ダウンロード
- Repository settings

Takayuki Saitoh / Untitled project

NanoASURA

招待 クローンの作成 ...

Here's where you'll find this repository's source files. To give your users an idea of what they'll find here, [レポジトリに説明を加える](#).

master Files Filter files

名前	サイズ	最後のコミット	メッセージ
plot		2022-09-08	Remove param.txt
runs		2022-09-08	Add param.toml and remove param.txt
src		2022-09-08	Update make switch
.gitignore	90 B	2019-02-08	Add .gitignore
LICENSE	1.42 KB	2022-09-08	Update LICENSE
README.md	3.09 KB	2019-12-16	README.md を Bitbucket 上でオンラインで編集し...
bitbucket-pipelines.yml	442 B	2019-11-26	Initial Bitbucket Pipelines configuration

レポジトリの詳細

最終更新
2022-09-08

未対応のプルリクエスト	ブランチ
0	1
ウォッチャー	フォーク
1	0
バージョン管理システム	言語
Git	C

アクセス権限レベル
管理

1 of 1 件のビルド合格

✓ Pipeline #14 for master
2022-09-08

フィードバックを送信

License

- MIT ライセンスの元で配布しています
- <http://opensource.org/licenses/MIT>

実行について (CfCAマニュアル)

- システムの概略
- ジョブ管理システム
- ジョブ実行@XD2000
- 可視化@解析サーバ

ディレクトリ構造

- **src** : ソースコード
 - **setup** : 初期条件生成ファイル群
- **runs** : 作業ディレクトリ
 - **shocktube** : 1D shocktube test
 - **hydrostatic** : 2D hydrostatic test
 - **kh** : 2D Kelvin-Helmholtz inst. test
 - **rt** : 2D Rayleigh-Taylor inst. test
 - **sedov** : 3D Sedov-Taylor test
 - **keplar** : 2D keplar disk test
 - **galaxy** : 2D barred galaxy model test
 - **evrard** : 3D spherical collapse test
- **plot** : plot tools
- **doc** : Documents generated by DoxyGen

Parameter file “param.toml”

```
Title = "nano ASURA parameter file"
# All parameters described in this file

[Mode]
  RunType = 0          # 0 is the shockt
  NParticles = 1000    # Number of parti
  ShowLog = 1         # Verbose mode

[IO]
  OutDir = "./data_ssph" # Data outpu
  ICFile = ""           # Initial c
  RunName = "shocktube" # Base name
  OutputFileNumber = 100 # Number of
  WriteEveryStep = 0    # When this

[Boundary]
  Dimension = 1        # Dimension.
  PeriodicBoundary = 1 # Periodic bo
  LBox0 = 2.0          # Box size.
  LBox1 = 1.0          # Not used in
  LBox2 = 1.0          # Not used in

[Time]
  TEnd = 0.1           # Simulation
  CFL = 0.3            # Coefficient
```

```
[Hydro]
  UseDISPH = 0          # If 1, AS
  SelectKernelType = 1 # 0=cubic
                        # 1=cubic
                        # 2=Wendla
  KernelEvaluationType = 1 # If this
                        # If 1, AS
                        # where m,
  KernelEta = 1.2       # KenrelEt
  UseGradh = 1          # Use th
  UseGradN = 1          # Use bo
  DerivativeOperatorType = 1 # 0=the
                        # 1=thos
  Gamma = 1.4           # Specif
  Ns = 7                # Number
  Nspm = 1              # Tolera
  ViscType = 0          # If 0, us
  ViscAlpha = 1.0       # Viscosit
  UseVariableAlpha = 1 # If 1, th
  ViscAlphaMin = 0.1    # Min alph
  ViscAlphaMax = 2.0    # Max alph
  ViscBalsara = 0       # Switch f
  ViscSignalVelocityBeta = 3.0 # A fa

[Thread]
  ThreadNumber = 8      # Number of threa
  DynamicChunk = 10    # Chunk size for
```

Shocktube テスト

- 圧縮性流体の標準的テスト
- このテストで主にショック補足能力を確認する




$$\begin{aligned} \rho = 1, \quad P = 1, \quad v = 0 \quad (x \leq 0), \\ \rho = 0.25, \quad P = 0.1795, \quad v = 0 \quad (x > 0), \end{aligned}$$

Shocktube テストの実行

- 作業ディレクトリ: ./runs/shocktube
- 次の二つの場合を試してみましょう:
 - UseDISPH 1 and ./data_disph
 - UseDISPH 0 and ./data_ssph

[IO]

```
OutDir = "./data_disph" # Output directory.
ICFile = "" # Initial condition file.
RunName = "shocktube" # Base name of output file.
OutputFileNumber = 100 # Number of output files.
WriteEveryStep = 0 # When this flag is 1, the program writes particle data after every step.
```



[Boundary]


```
Dimension = 1 # Dimension.
PeriodicBoundary = 1 # Periodic boundary condition.
LBox0 = 2.0 # Box size.
LBox1 = 1.0 # Not used in this run.
LBox2 = 1.0 # Not used in this run.
```

[Time]

```
TEnd = 0.1 # Simulation end time.
CFL = 0.3 # Coefficient for the CFL timestep.
```

[Hydro]

```
UseDISPH = 1 # If 1, ASURA adopts DISPH. If 0, ASURA uses standard SPH.
SelectKernelType = 1 # 0=cubic spline kernel,
```



可視化プログラム、ついてます

- 可視化プログラムは./plot 以下にあります、以下の通りコンパイルしてください(CfCA の解析サーバを利用してください)
 - cd ./plot
 - make
 - “plot.out” ができます
- パラメータファイルを読み込んで、適切なディレクトリから適切なファイルを読み込んで作図します

```
Title = "nano ASURA parameter file"
```

[Environment]

```
PythonPath = "python3"
```

[Mode]

```
PlotType = 0
```

```
WriteMode = 2
```

```
ShowTime = 1
```

[TargetFiles]

```
FileStart = 0
```

```
FileEnd = 3000
```

[Shocktube]

```
OutDir = "./data_st_disph"
```

```
FileName = "shocktube"
```

```
DataDir = "/xd-
```

```
work/hydroXX/nanoasura/runs/shocktube
```

```
/data_disph"
```

```
PlotType = 0
```

```
PlotSolution = 1
```

```
SolutionFileName =
```

```
"./solution_sod.txt"
```

Parameter file for plot

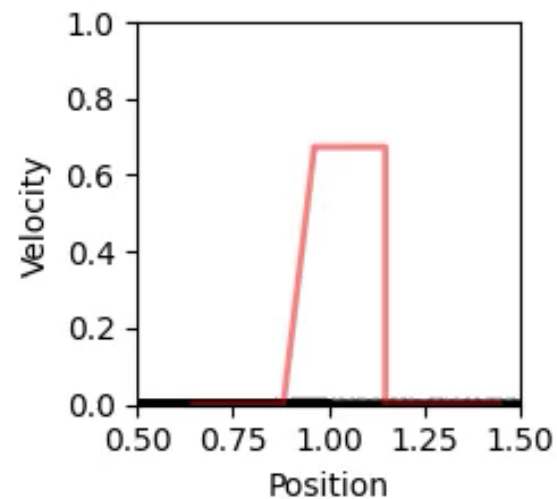
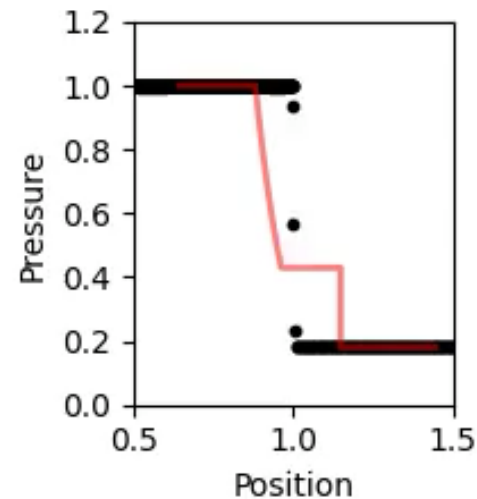
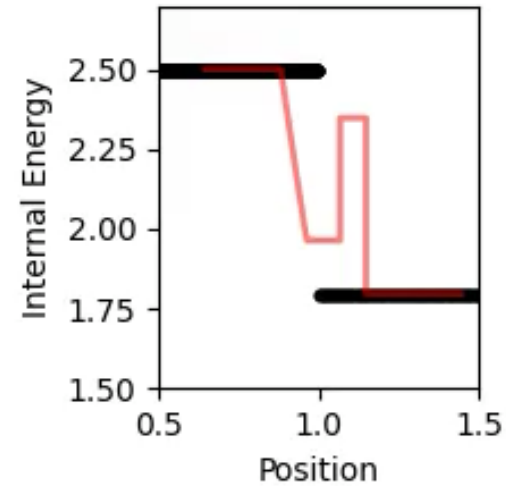
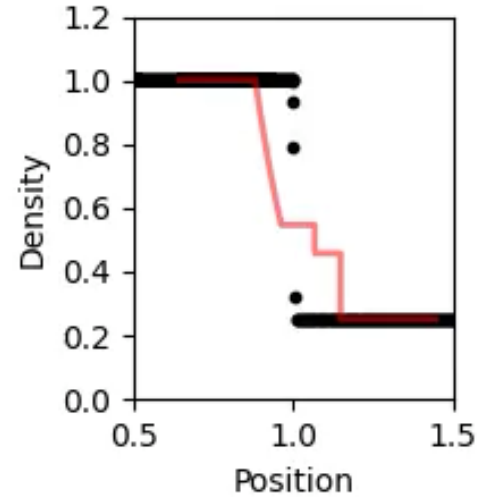
- パラメータは param.toml に定義されている
- とりあえず大事なところ
 - [Environment] PythonPath は matplotlib の使える python3 へのパスが書かれている必要がある
 - [Mode] PlotType はどのタイプの計算の可視化をするか(shocktube なら 0)
 - [Shocktube] DataDir : データ入力ディレクトリ
 - [Shocktube] OutDir : 出力ディレクトリ、**変え忘れると前の図が上書きされてしまいますので注意**
 - [Mode] WriteMode は出力フォーマットを定義
 - 0=pdf、1=eps、2=png
 - とりあえず2で
 - [Shocktube][Hydrostatic]...と PlotType に対応するパラメータが下部にあり

※上の例は余計なコメント行削除済み

Shocktube: DISPH

- Shocktube test (runs/shocktube)

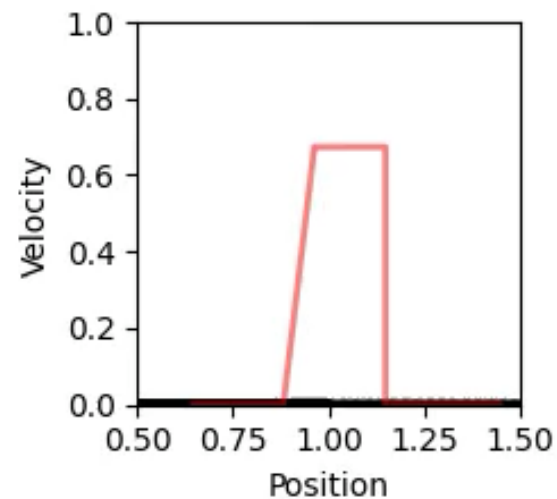
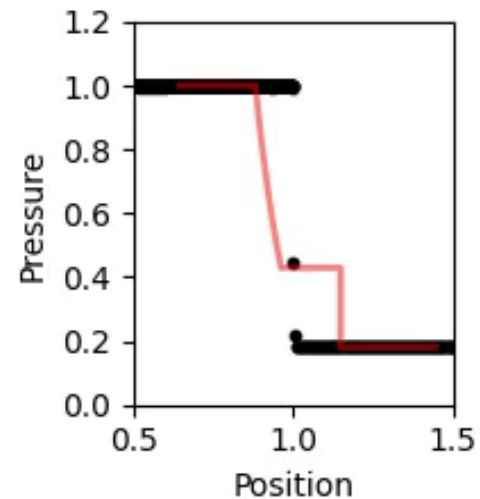
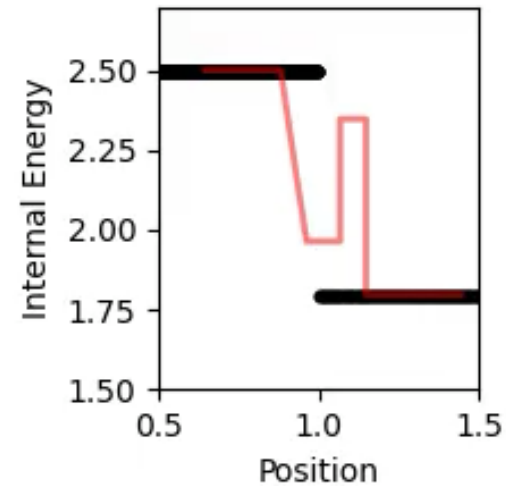
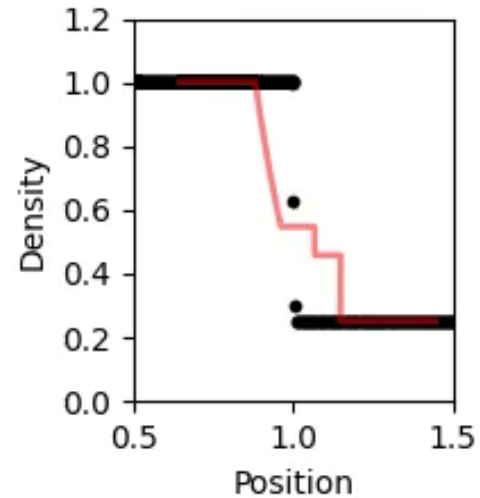
[Shocktube] PlotType=4



Shocktube: SSPH

- Shocktube test (runs/shocktube)

[Mode] PlotType=1
[Shocktube] PlotType=4



アニメーションファイル作成

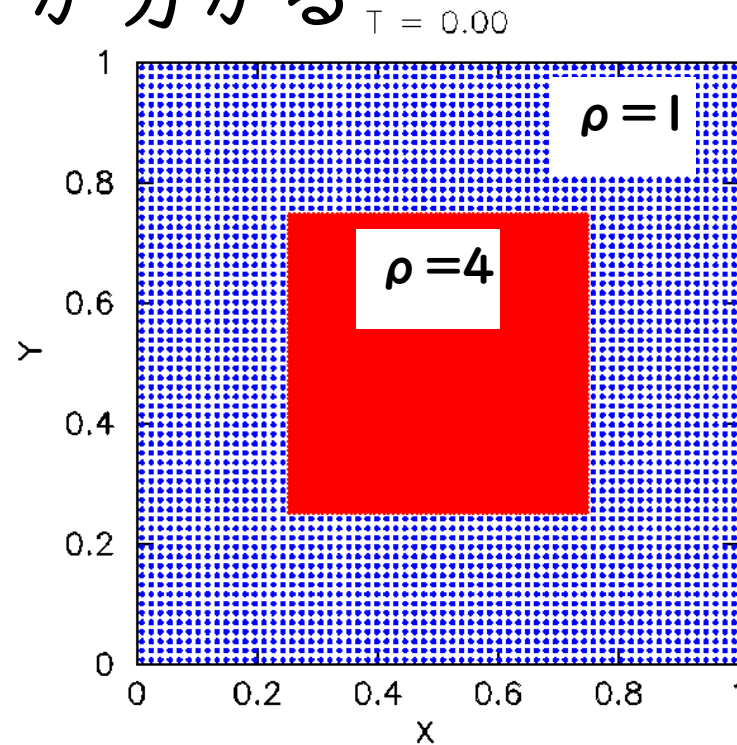
- ffmpeg によるアニメーション作成

```
./run_ffmpeg.sh "./data_st_disph/shocktube_four.%04d.png" shocktube_disph.mp4
```

- ffplay -loop 100 ./shocktube_disph.mp4
- パワーポイントなどにも貼れます

Hydrostatic Equilibrium テスト

- 従来の SPH 法は接触不連続面を扱えない
→ 非物理的表面張力が現れる
- このテストではこの影響を見ることができ、また、DISPH でどのように改善されるかが分かる




Hydrostatic Equilibrium テストの実行

- 作業ディレクトリ: ./runs/hydrostatic
- 次の二つのケースを試しましょう:
 - UseDISPH 1, OutDir ./data_disph
 - UseDISPH 0, OutDir ./data_ssph

[IO]

```
OutDir = "./data_disph" # Output directory.
ICFile = "" # Initial condition file.
RunName = "hydrostatic" # Base name of output file.
OutputFileNumber = 80 # Number of output files.
WriteEveryStep = 0 # When this flag is 1, the program writes particle data after every step.
```



[Boundary]


```
Dimension = 2 # Dimension.
PeriodicBoundary = 1 # Periodic boundary condition.
LBox0 = 1.0 # Box size.
LBox1 = 1.0 # Box size.
LBox2 = 1.0 # Not used in this run.
```

[Time]

```
TEnd = 8.0 # Simulation end time.
CFL = 0.3 # Coefficient for the CFL timestep.
```

[Hydro]

```
UseDISPH = 1 # If 1, ASURA adopts DISPH. If 0, ASURA uses standard SPH.
SelectKernelType = 3 # 0=cubic spline kernel,
```

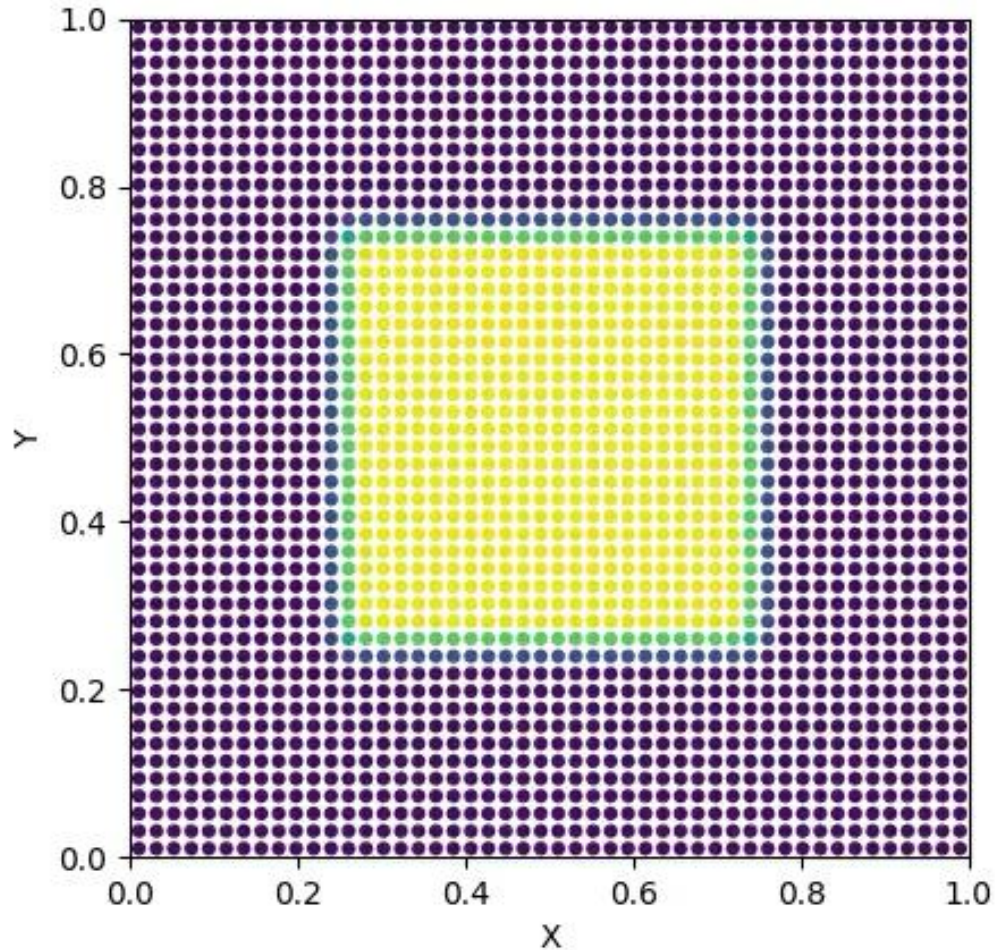


Hydrostatic equilibrium テストの可視化

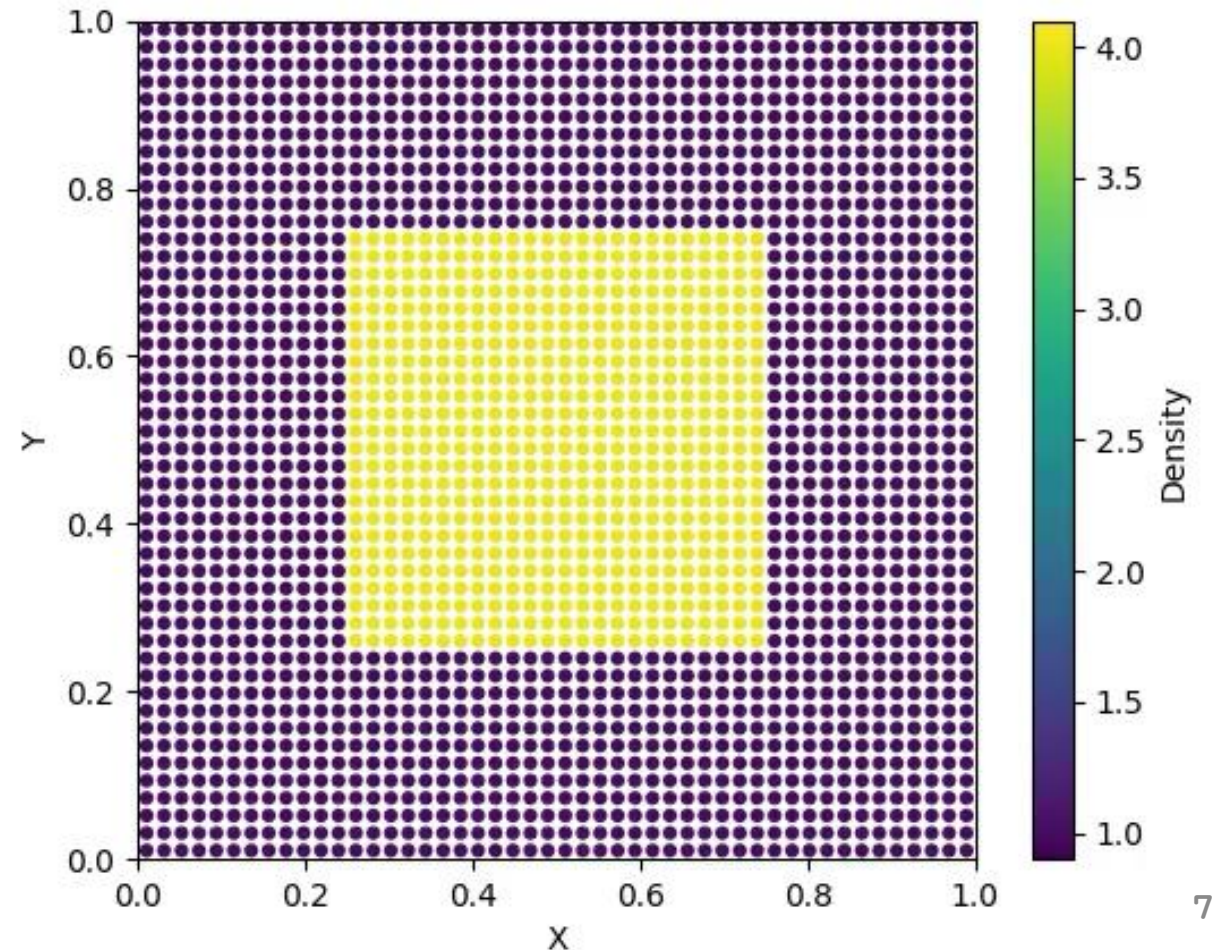
- Hydrostatic tests (run/hydrostatic)

[Mode] PlotType=1
[Hydrostatic] PlotType=1

SSPH

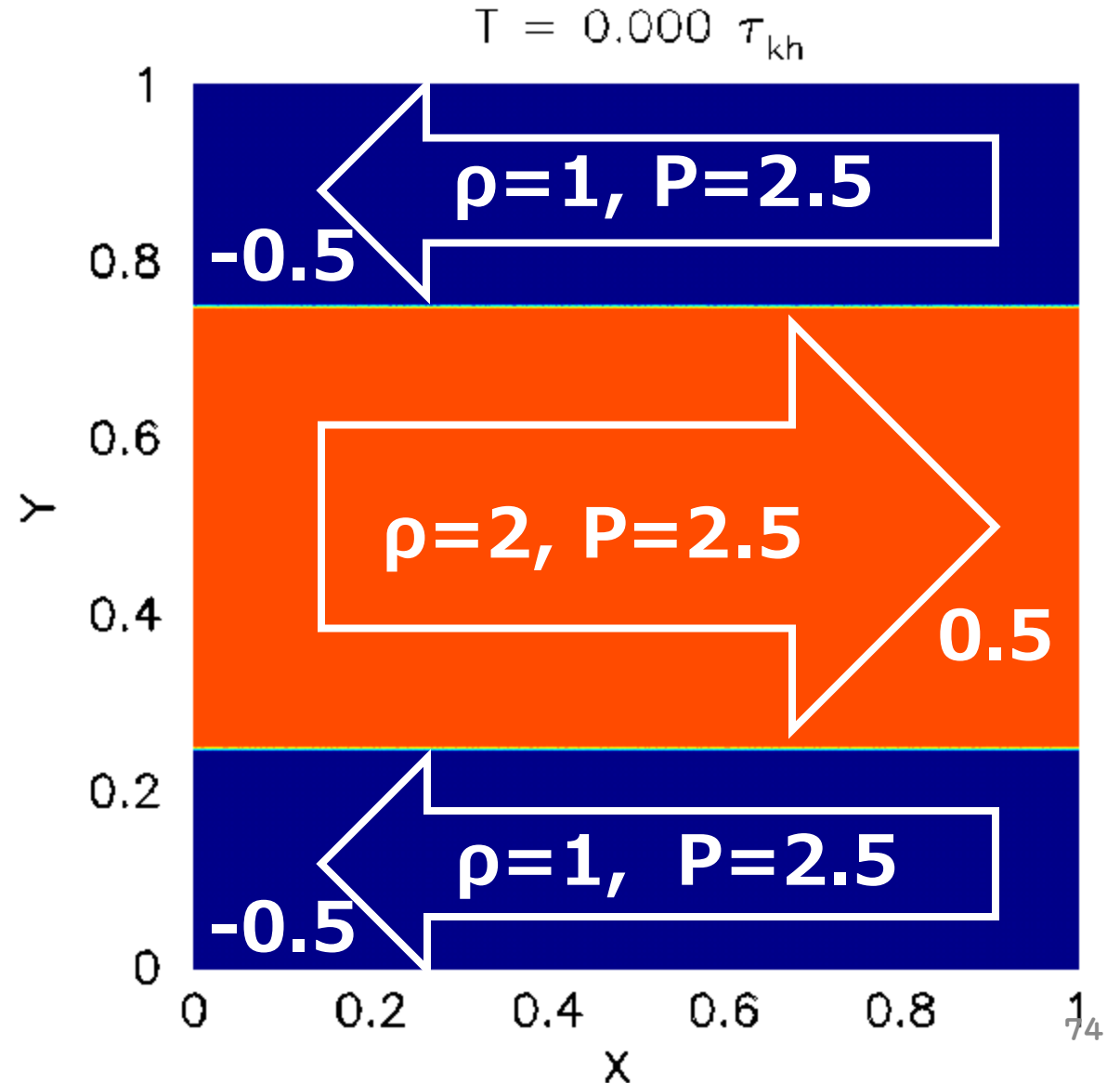


DISPH



Kelvin-Helmholtz 不安定性テスト

- シアーによる流体不安定性
- 初期条件:
密度比 1:2, $P_{init} = 2.5$,
 $V_{relative} = 1$
- 境界に速度摂動を与える
- 接触不連続面での物理量評価の違いが不安定性成長に与える影響がわかる




Kelvin-Helmholtz 不安定性テストの実行

- 作業ディレクトリ: ./runs/kh
- 次の二ケースを試してみましょう:
 - UseDISPH 1, and OutDir ./data_disph
 - UseDISPH 0, and OutDir ./data_ssph

[IO]

```
OutDir = "./data_disph" # Output directory.
ICFile = "" # Initial condition file.
RunName = "kh" # Base name of output file.
OutputFileNumber = 100 # Number of output files.
WriteEveryStep = 0 # When this flag is 1, the program writes particle data after every step.
```



[Boundary]


```
Dimension = 2 # Dimension.
PeriodicBoundary = 1 # Periodic boundary condition.
LBox0 = 1 # Box size.
LBox1 = 1 # Box size.
LBox2 = 1 # Not used in this run.
```

[Time]

```
TEnd = 2.0 # Simulation end time.
CFL = 0.3 # Coefficient for the CFL timestep.
```

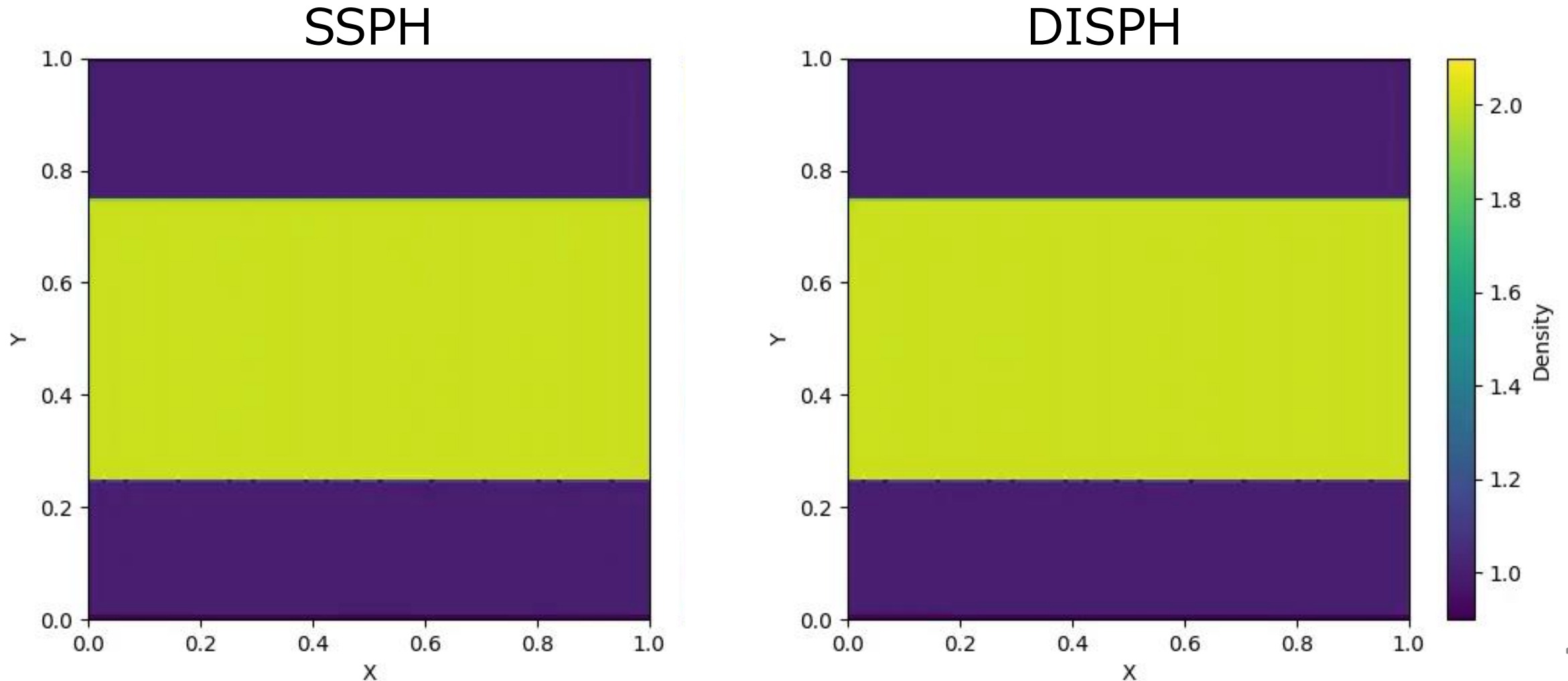
[Hydro]

```
UseDISPH = 1 # If 1, ASURA adopts DISPH. If 0, ASURA uses standard SPH.
SelectKernelType = 3 # 0=cubic spline kernel,
```



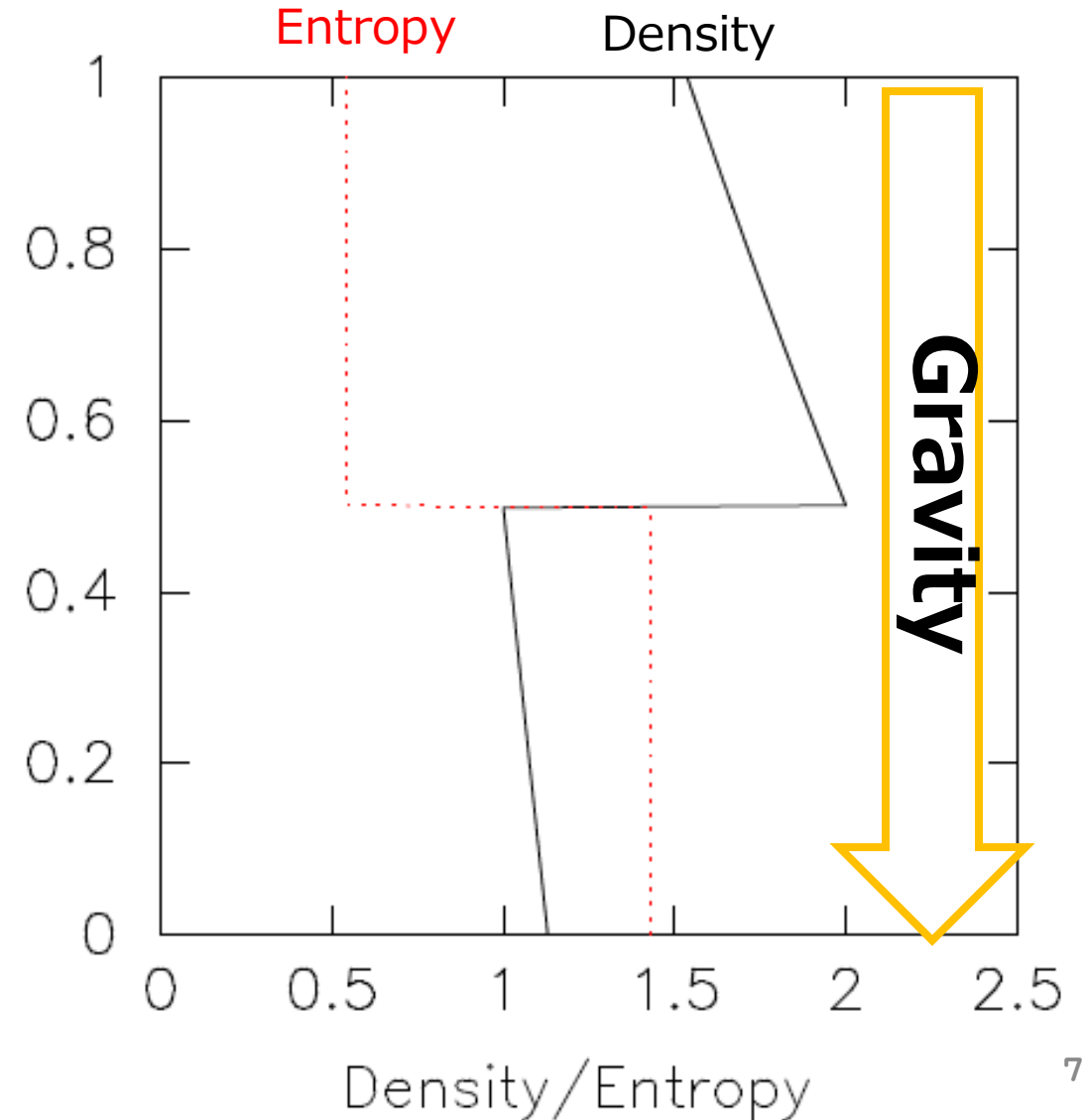
Kelvin-Helmholtz 不安定性テストの可視化

- Kelvin-Helmholtz inst. tests (runs/kh) [Mode] PlotType=2 [KelvinHelmholtz] PlotType=3



Rayleigh-Taylor 不安定性テスト

- 重力によって引き起こされる不安定性
- 初期条件: 密度比 1:2 @ $y=0.5$
- 鉛直方向に速度の摂動を与える
- 接触不連続面での物理量評価の違いが不安定性成長に与える影響がわかる




Rayleigh-Taylor 不安定性テストの実行

- 作業ディレクトリ: ./runs/rt
- 次の二つのケースを試してみましょう:
 - UseDISPH 1, and OutDir ./data_disph
 - UseDISPH 0, and OutDir ./data_ssph

[IO]

```
OutDir = "./data_disph" # Output directory.
ICFile = ""             # Initial condition file.
RunName = "rt"         # Base name of output file.
OutputFileNumber = 100 # Number of output files.
WriteEveryStep = 0     # When this flag is 1, the program writes particle data after every step.
```



[Boundary]


```
Dimension = 2          # Dimension.
PeriodicBoundary = 1  # Periodic boundary condition.
LBox0 = 0.25           # Box size.
LBox1 = 1.0           # Box size.
LBox2 = 1.0           # Not used in this run.
```

[Time]

```
TEnd = 10              # Simulation end time.
CFL = 0.3              # Coefficient for the CFL timestep.
```

[Hydro]

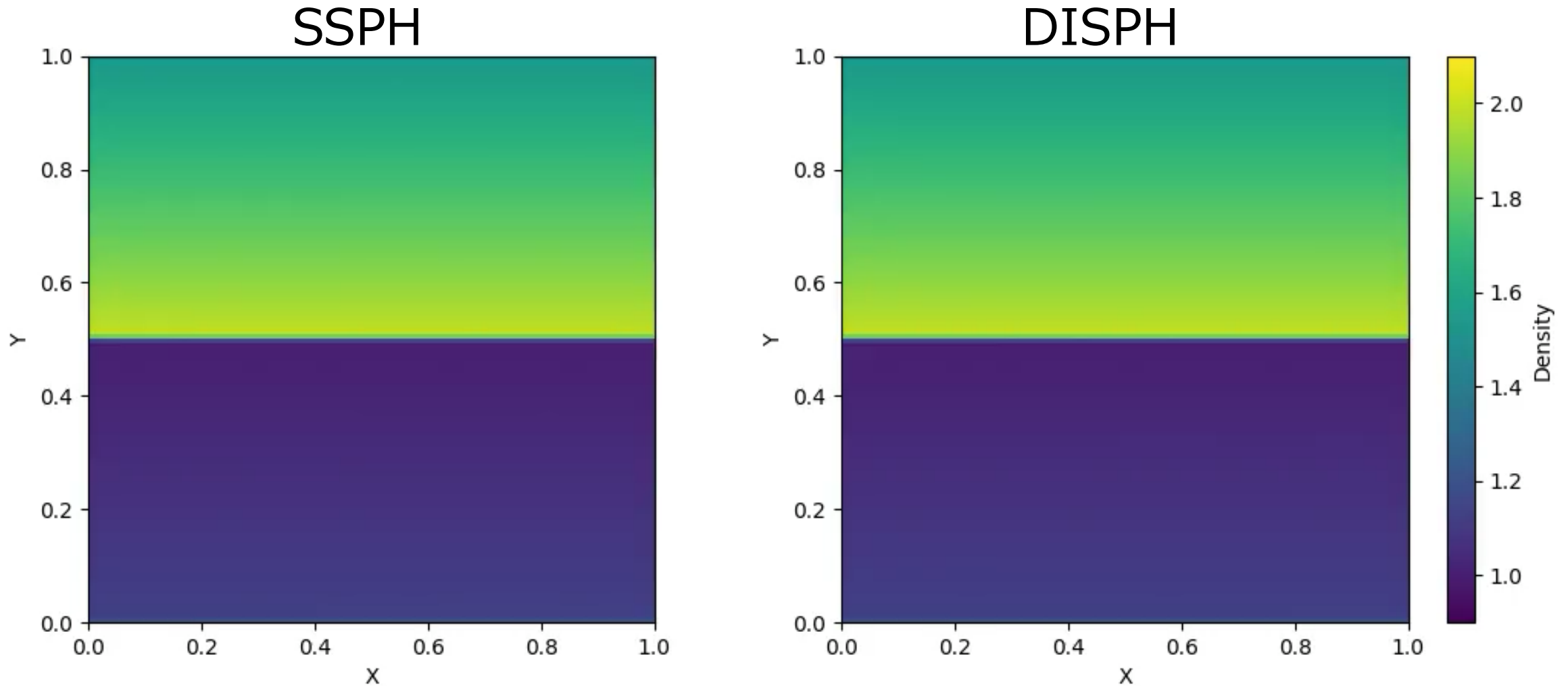
```
UseDISPH = 1          # If 1, ASURA adopts DISPH. If 0, ASURA uses standard SPH.
SelectKernelType = 3 # 0=cubic spline kernel, .
```



Rayleigh-Taylor 不安定性テストの可視化

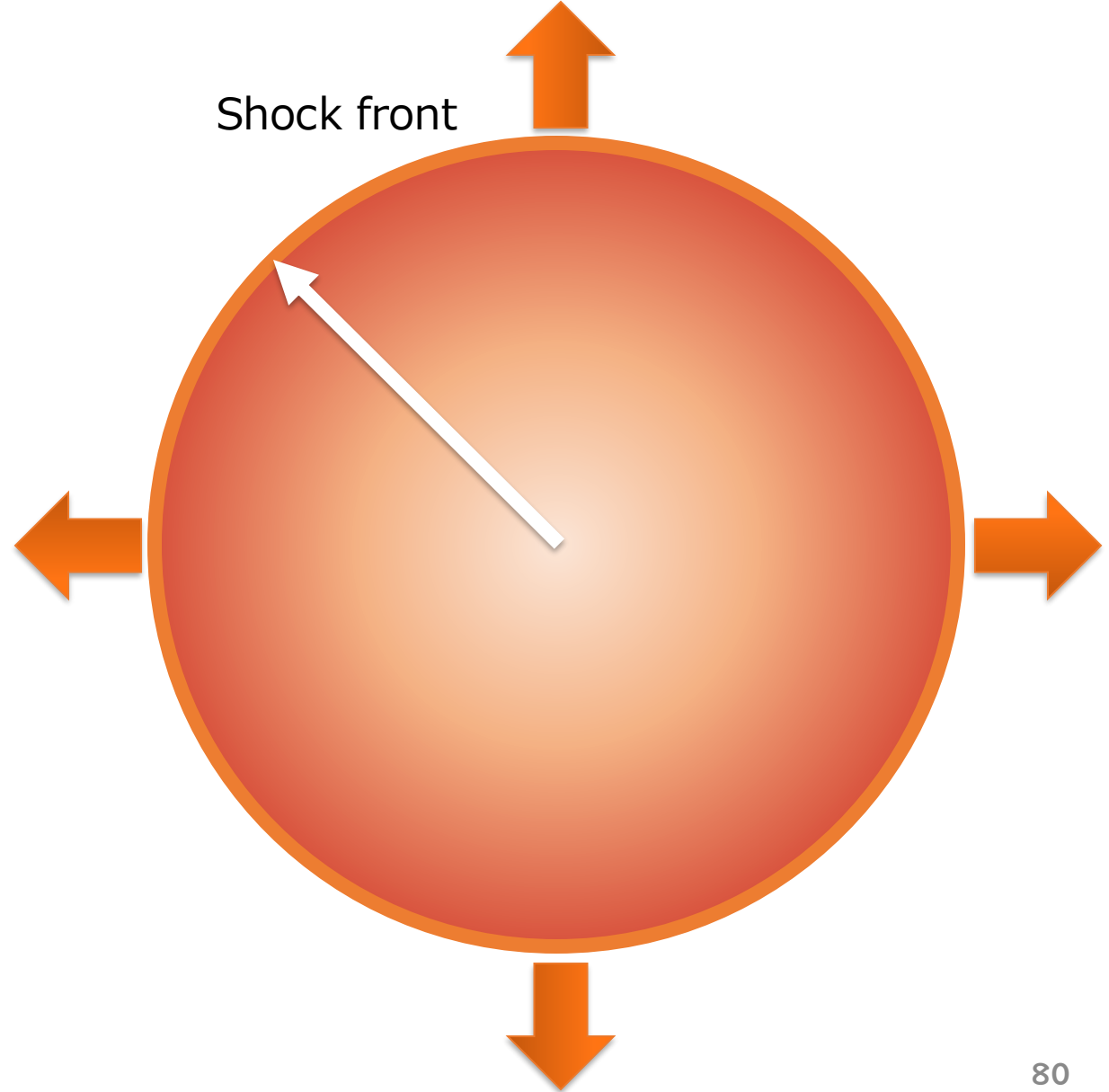
- Rayleigh-Taylor inst. tests (runs/rt)

PlotType=3



Sedov-Taylor テスト

- 点源爆発問題
- 初期条件:
 - 一様密度 ($=1$)
 - 中心にエネルギー ($=1$)
 - 背景ガスは十分低温



Sedov-Taylor テストの実行

- 作業ディレクトリ: ./runs/sedov
- 次のニケースを試してみましょう:
 - UseDISPH 1, and OutDir ./data_disph
 - UseDISPH 0, and OutDir ./data_ssph

```
OutDir = "./data_disph" # Output directory.
#ICFile = "./init/BlastWaveGlass.128.dat" # Initial condition file.
ICFile = "./init/BlastWaveGlass.64.dat" # Initial condition file.
#ICFile = "./init/BlastWaveGlass.32.dat" # Initial condition file.
RunName = "sedov" # Base name of output file.
OutputFileNumber = 100 # Number of output files.
WriteEveryStep = 0 # When this flag is 1, the program writes particle data after every step.
```

[Boundary]

```
Dimension = 3 # Dimension.
PeriodicBoundary = 1 # Periodic boundary condition.
LBox0 = 1 # Box size.
LBox1 = 1 # Box size.
LBox2 = 1 # Not used in this run.
```

[Time]

```
TEnd = 0.05 # Simulation end time.
CFL = 0.3 # Coefficient for the CFL timestep.
```

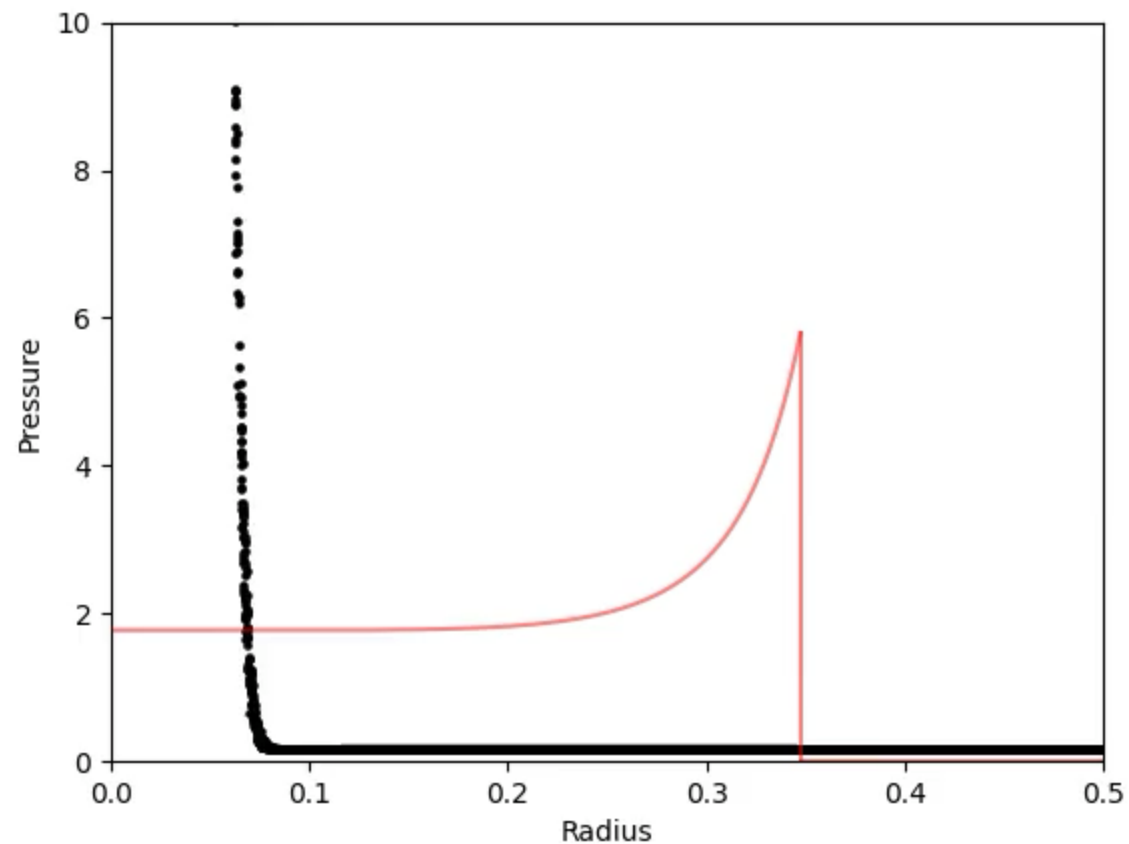
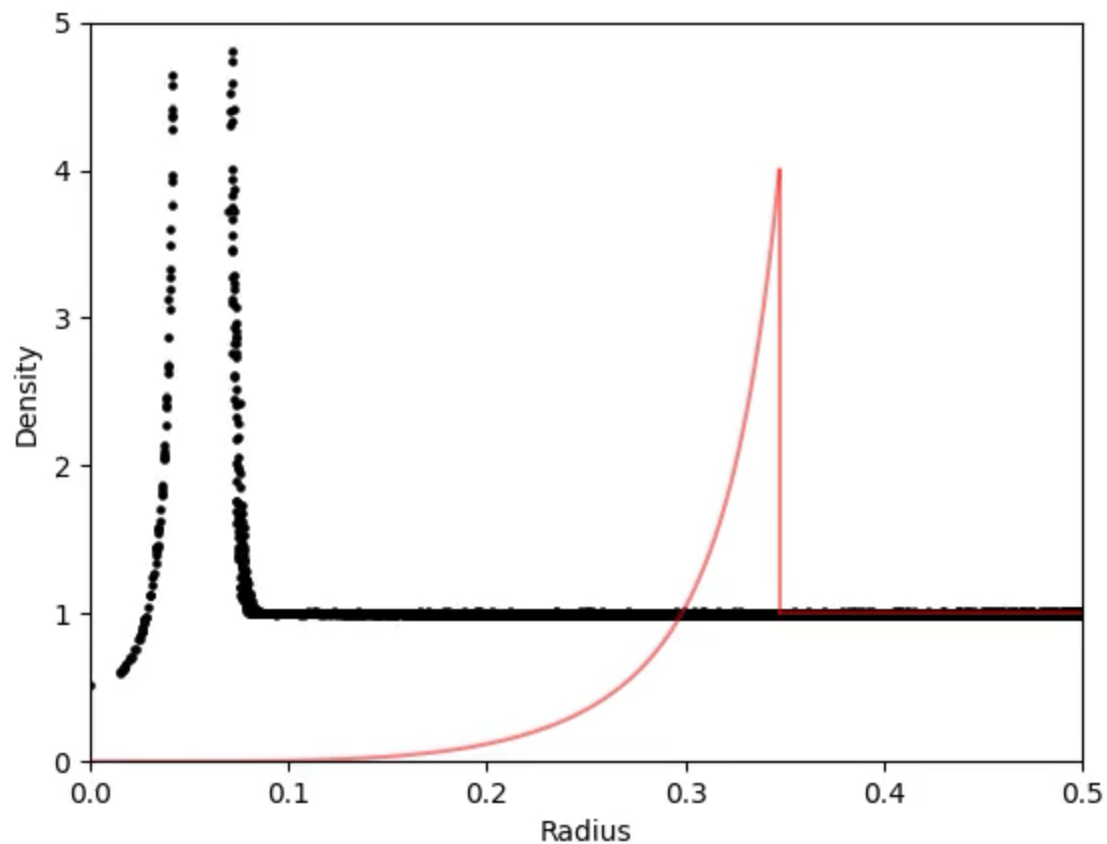
[Hydro]

```
UseDISPH = 1 # If 1, ASURA adopts DISPH. If 0, ASURA uses standard SPH.
```

Sedov-Taylor テストの可視化

- Sedov-Taylor tests (runs/sedov)

[Mode] PlotType=4
[Sedov] PlotType=1,2




Sedov-Taylor テストの可視化

- Param.toml を編集して表示モードを変えてみる

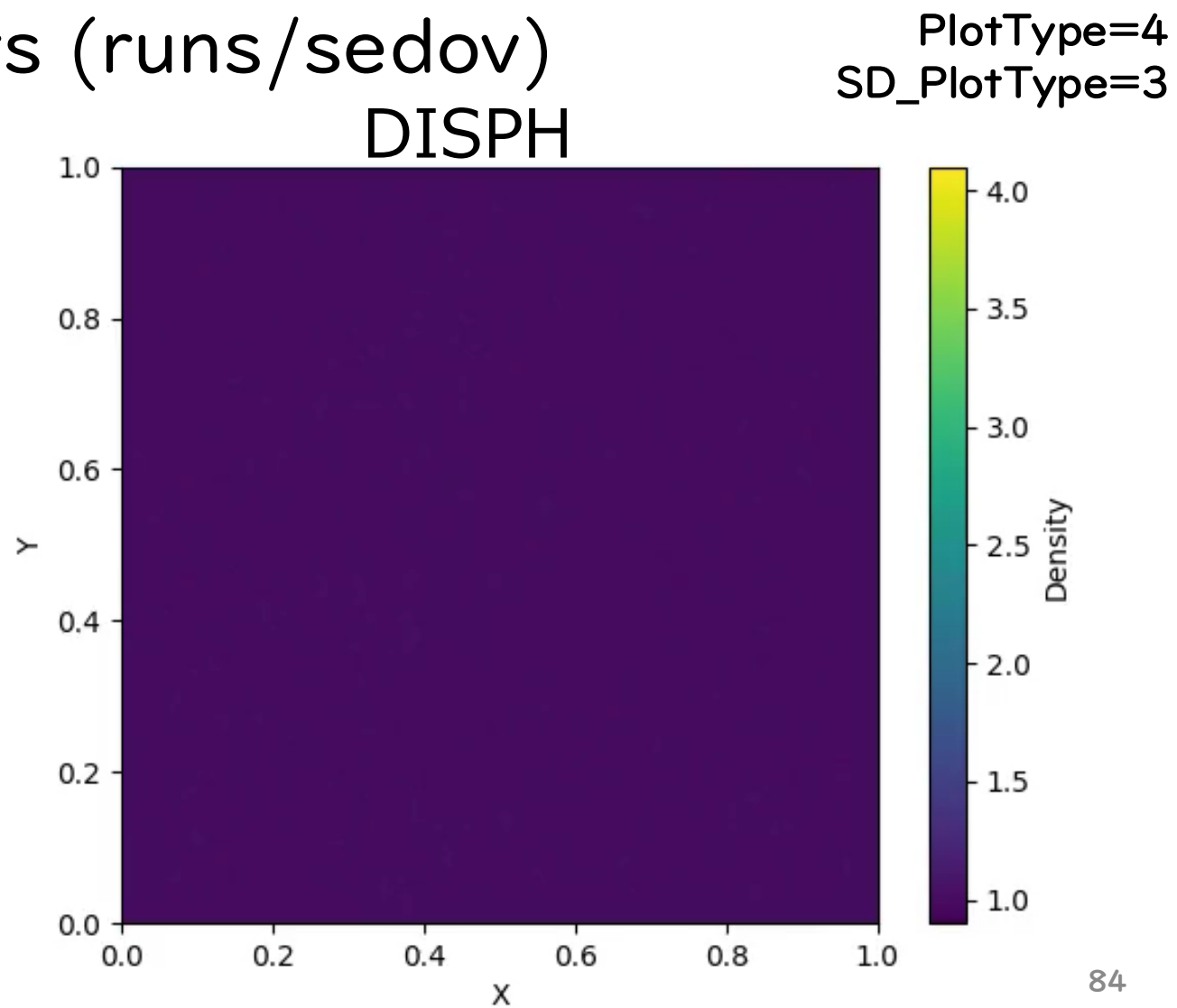
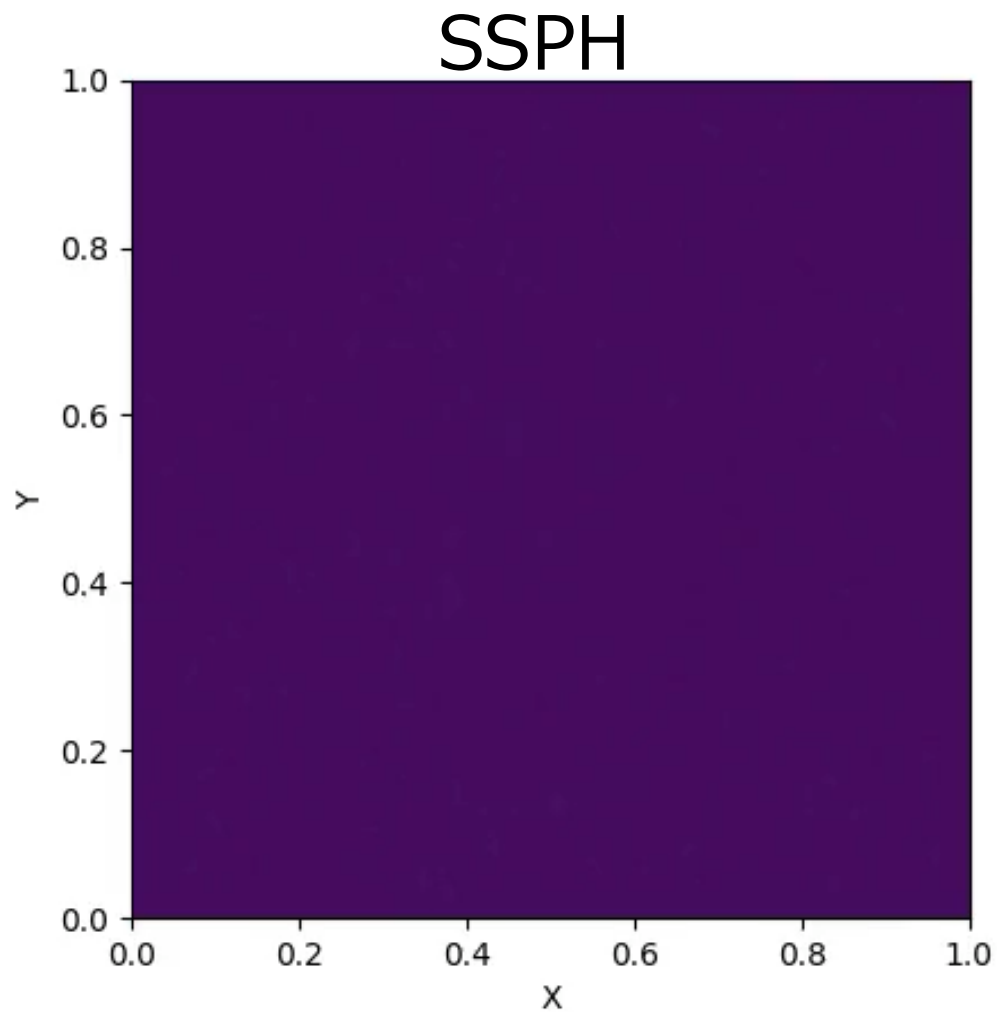
[Sedov]

```
OutDir = "./glass_64"  
FileName = "sedov"  
DataDir = "../runs/sedov/glass"  
PlotType = 0 # 0=slice,1=rho,2=p,3=Density map  
PlotSolution = 1  
SolutionFileName = "./sedov_t005.dat"  
Xmin = 0.0  
Xmax = 1.0  
Ymin = 0.0  
Ymax = 1.0  
Slice = 0.05  
Rmin = 0.0  
Rmax = 0.5  
Rhomin = 0.0  
Rhomax = 5.0  
Pmin = 0.0  
Pmax = 10.0  
GridSize = 128
```



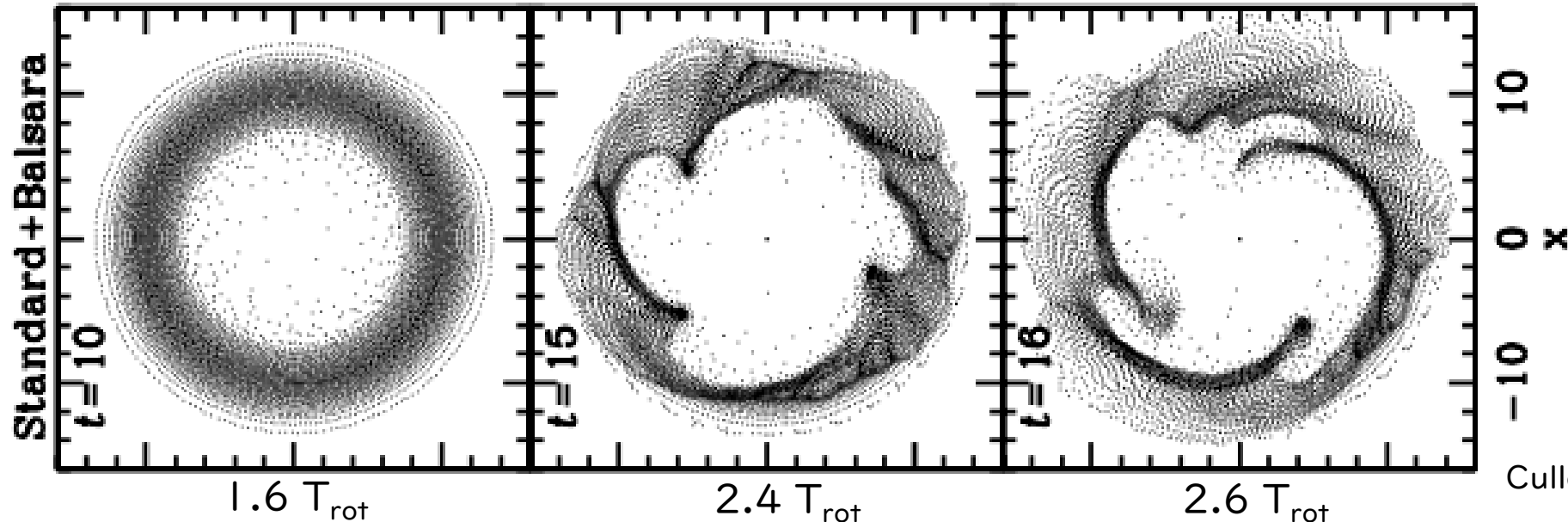
Sedov-Taylor テストの可視化

- Sedov-Taylor tests (runs/sedov)



Keplerian disk テスト

- 回転する円盤構造は天体形成過程で頻出する基本的構造
- 数値シミュレーションは難しい(SPHに限らず)
- Keplerian disk だと SPH では数回転持たない
→ よりよい人工粘性スイッチが必要 (Cullen & Dehnen 2010)

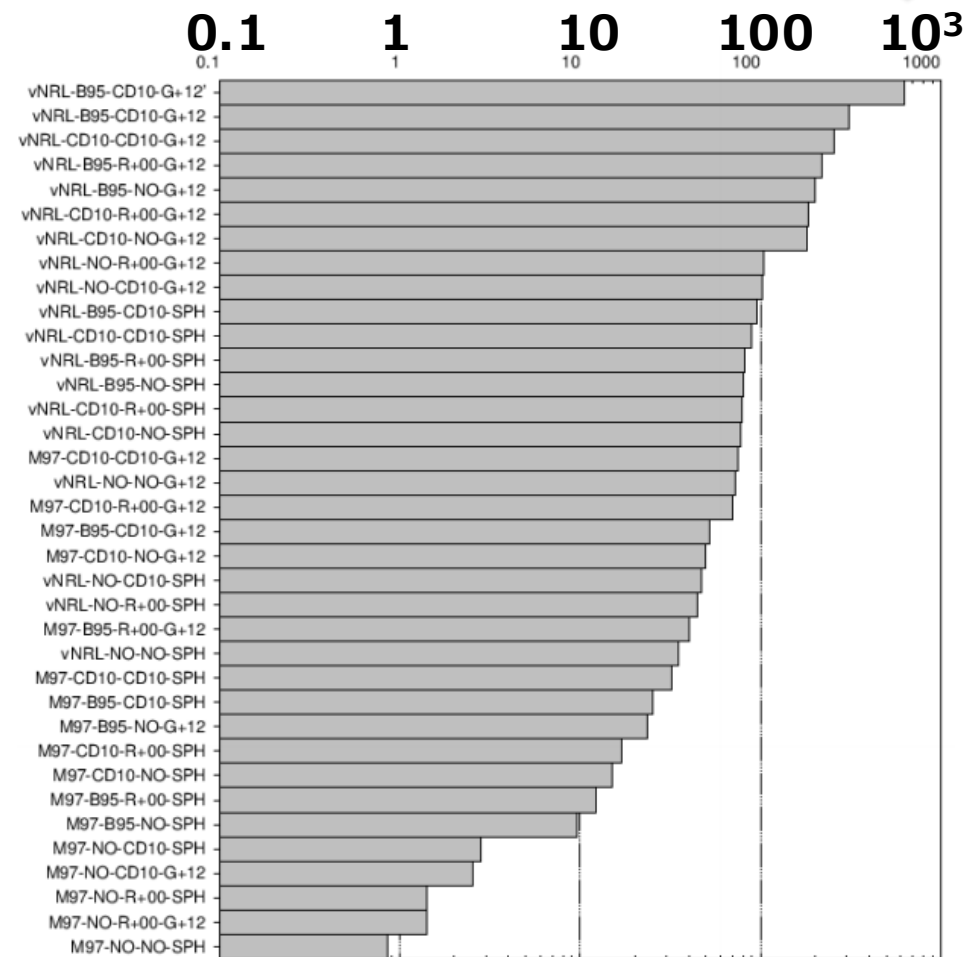


様々な人工粘性項の組み合わせと円盤寿命

$T_{rot} \sim 600!$

Type	Abbreviation	Equations	Reference
Form of AV	vNRL	(1)	von Neumann & Richtmyer (1950); Landshoff (1955)
	M97	(6)	Monaghan (1997)
Shock indicator	No	No	Do not use
	R+00	(16)	Rosswog et al. (2000)
	CD10	(18)-(21)	Cullen & Dehnen (2010)
Shear switch	No	No	Do not use
	B95	(22)	Balsara (1995)
	CD10	(25)-(27)	Cullen & Dehnen (2010)
$\nabla \cdot v$	SPH	(3)	Lucy (1977)
	G+12	(4)	García-Senz et al. (2012)

- vNRL 型人工粘性と高精度な grad/div/rot が肝



MLS-based grad/div/rot

- 詳細は Garcia-Senz et al. 2012; Hosono, Saitoh & Makino 2016

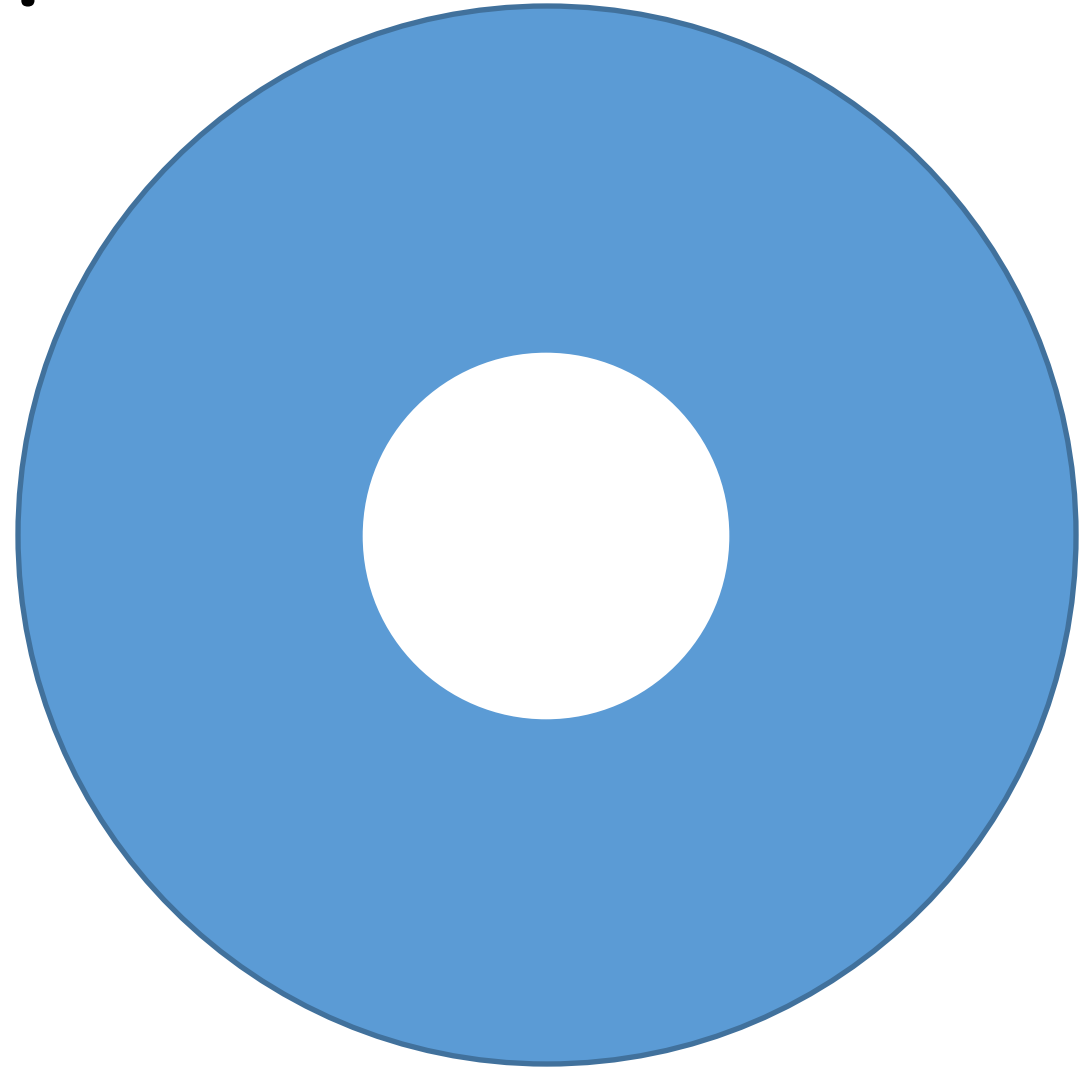
$$\nabla \cdot \mathbf{v}_i = \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} (\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i) \cdot [\mathcal{M}_i^{-1}(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i)] W(x_{ij}, h_i)$$

$$\mathcal{M}_i = \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i) \otimes (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i) W(x_{ij}, h_i)$$

Keplerian disk テスト

- 2D ケプラー回転円盤
- 初期条件:
 - 半径0.5→2に
 - 一様密度分布
 - 中心ポテンシャルの元で回転

$$\mathbf{a}_{\text{ext}} = \begin{cases} -\frac{GM}{(x^2 + \epsilon^2)^{3/2}} \mathbf{x} & |\mathbf{x}| < 0.25 \\ -\frac{GM}{x^3} \mathbf{x} & \text{otherwise} \end{cases}$$



Keplerian disk テストの実行

- 作業ディレクトリ: ./runs/keplar
- 次の二ケースを試してみましょう:
 - DerivativeOperatorType=1,ViscType=1,UseVariableAlpha=1
 - DerivativeOperatorType=0,ViscType=0,UseVariableAlpha=0

[Hydro]

```
UseDISPH = 1           # If 1, ASURA adopts DISPH. If 0, ASURA uses standard SPH.
SelectKernelType = 3  # 0=cubic spline kernel,
                      # 1=cubic spline kernel with a modification proposed by Thomas & Couchman (1992)
                      # 2=Wendland kernel C2, 3=Wendland kernel C4, 4=Wendland C6
KernelEvaluationType = 0 # If this flag is 0, ASURA evaluates the kernel size based on the neighbor number.
                        # If 1, ASURA uses  $h = \text{KernelEta} * (m/\rho)^{\{1/D\}}$ ,
                        # where  $m$ ,  $\rho$ , and  $D$  are mass, density and dimension, respectively.
KernelEta = 1.2       # KernelEta used when KernelEvaluationType == 1.

UseGradh = 1          # Use grad-h term.
UseGradN = 1          # Use both grad-N and grad-h terms.
DerivativeOperatorType = 0 # 0=the standard operators.
                        # 1=those shown in Hosono, Saitoh & Makino (2016).
Gamma = 1.6667        # Specific heat ratio.
Ns = 32               # Number of neighbor particles.
Nspm = 2              # Tolerance number of the neighbor number, Ns.

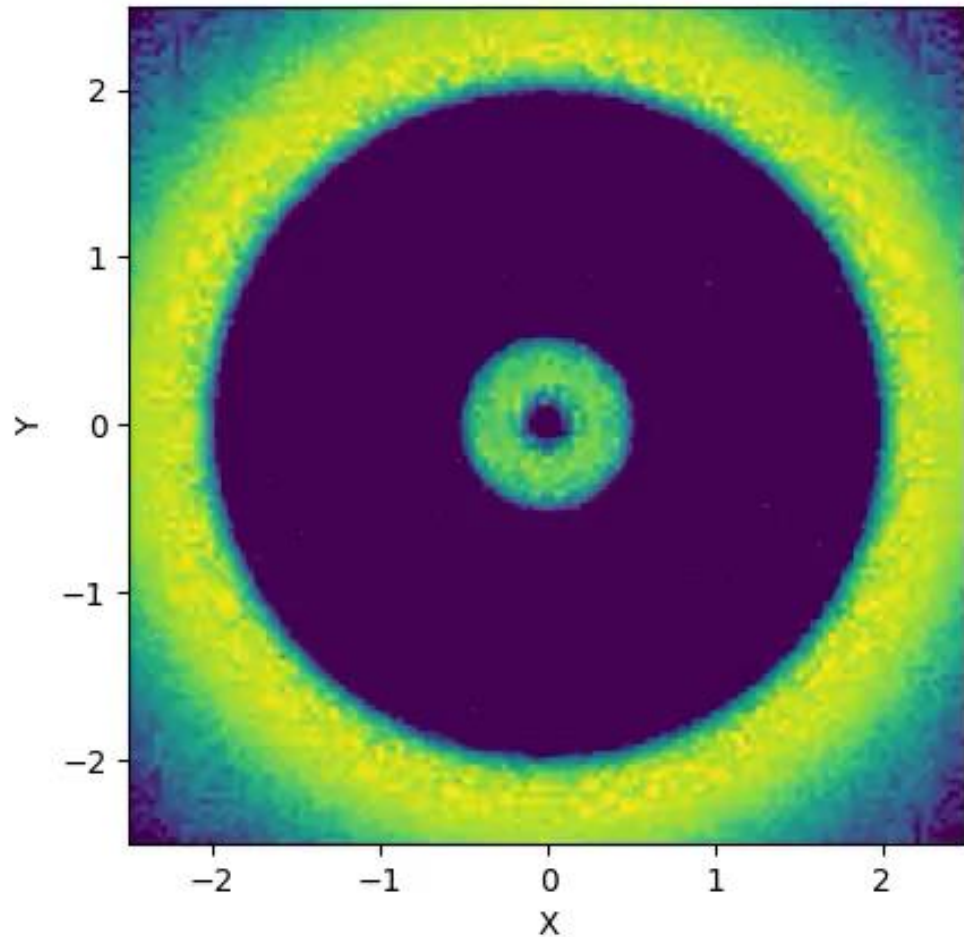
ViscType = 1          # If 0, use Monaghan 1997 type visc term. If 1, use vNR type visc term.
ViscAlpha = 0.1       # Viscosity coefficient.
UseVariableAlpha = 1  # If 1, this code uses the variable alpha mode.
ViscAlphaMin = 0.1    # Min alpha for the variable alpha mode.
```

Keplerian disk テストの可視化

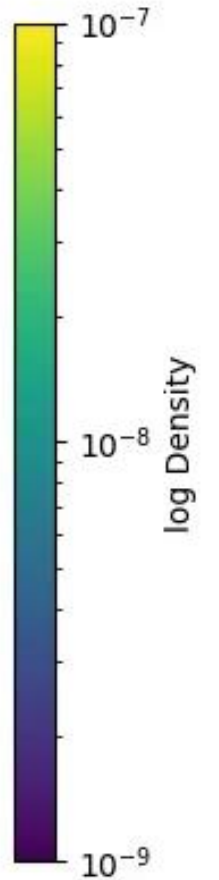
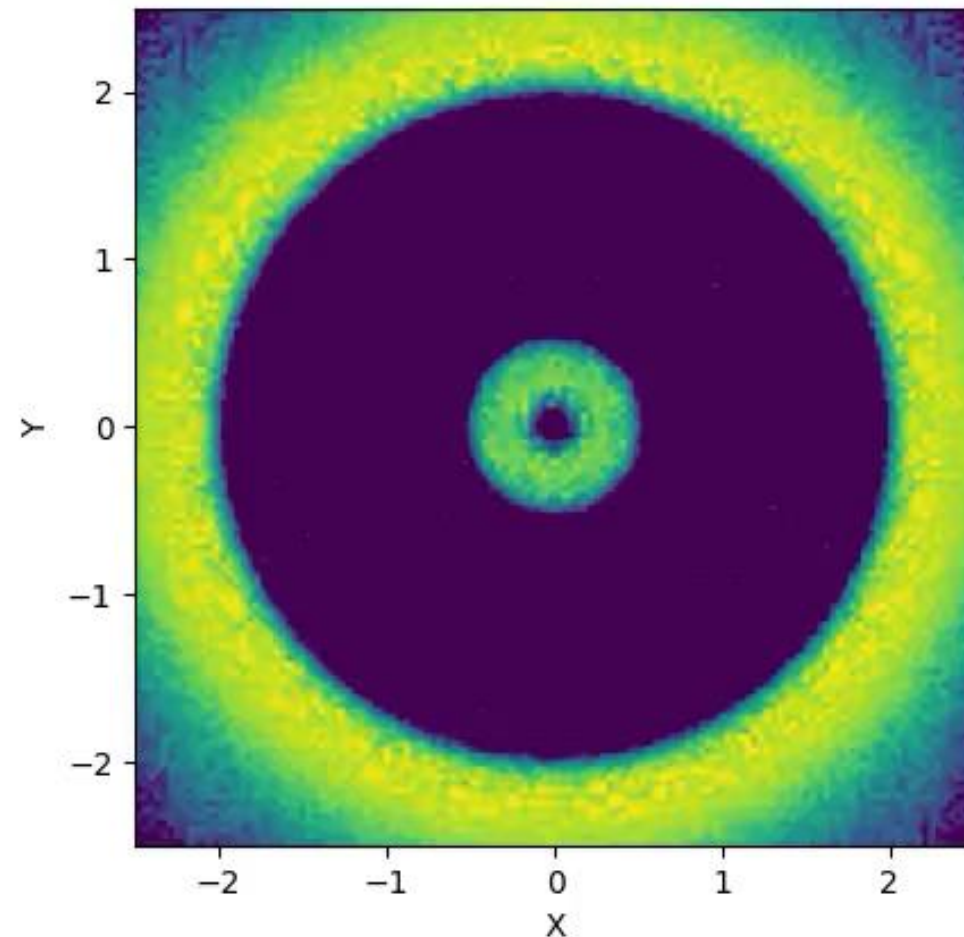
- Keplerian disk tests (runs/keplar)

[Mode] PlotType=5
[keplar] PlotType=1

Params 000

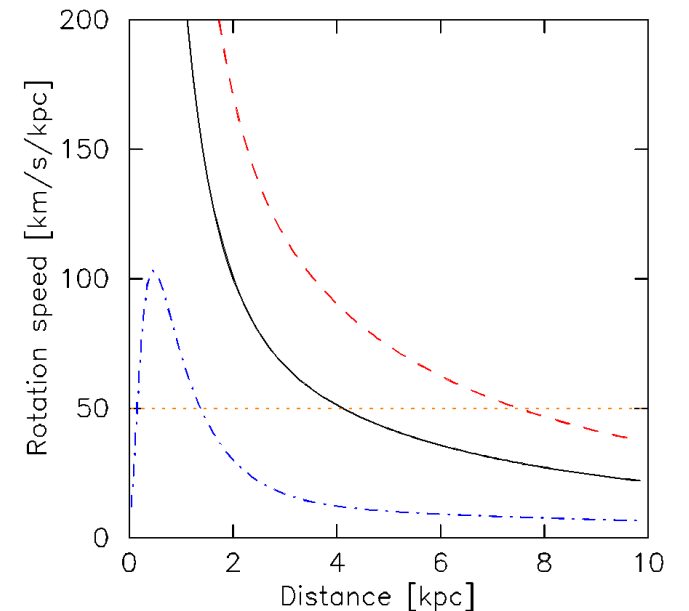
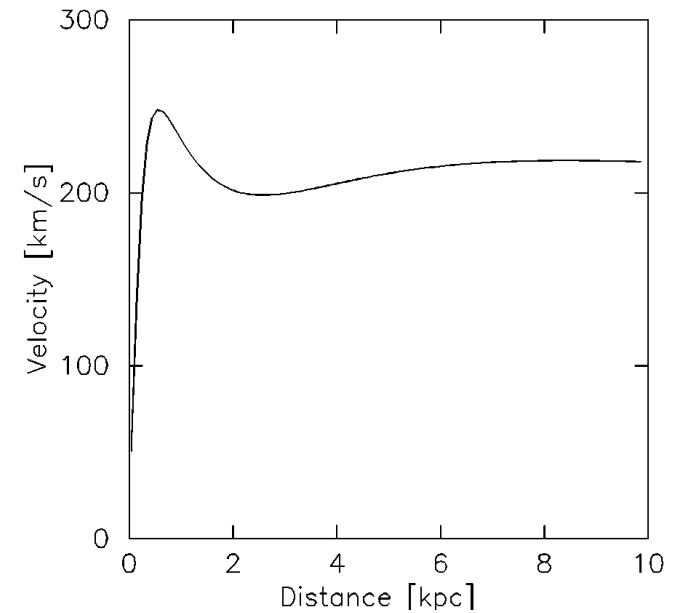


Params 111



Barred galaxy テスト

- 銀河ポテンシャル中の等温ガスの進化
- 初期条件:
exp ガス円盤
ガスは 10^4K (強制的に $du/dt=0$ にすることで温度を固定)
- ポテンシャルはダークマターハロー、バルジ、星円盤、バー
 - パラメータは Pettitt+2014, Wada 1994, Saitoh+2008 から



Barred galaxy テストの実行

- 作業ディレクトリ: ./runs/galaxy
- とりあえず今のモデルを試してみましょう:

```
[IO]
  OutDir = "./data_disph" # Data output directory.
  ICFile = ""             # Initial condition file.
  RunName = "galaxy"      # Base name of output file.
  OutputFileNumber = 100 # Number of output files.
  WriteEveryStep = 0      # When this flag is 1, the program writes particle data after every
step.

[Boundary]
  Dimension = 2           # Dimension.
  PeriodicBoundary = 0    # Periodic boundary condition.
  LBox0 = 1               # Box size.
  LBox1 = 1               # Box size.
  LBox2 = 1               # Not used in this run.

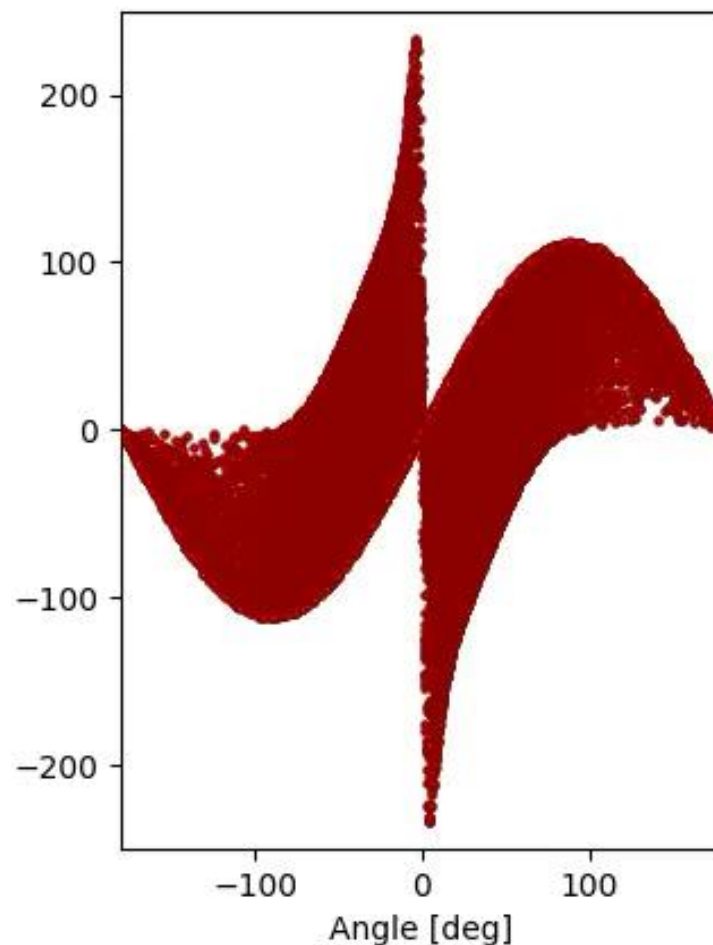
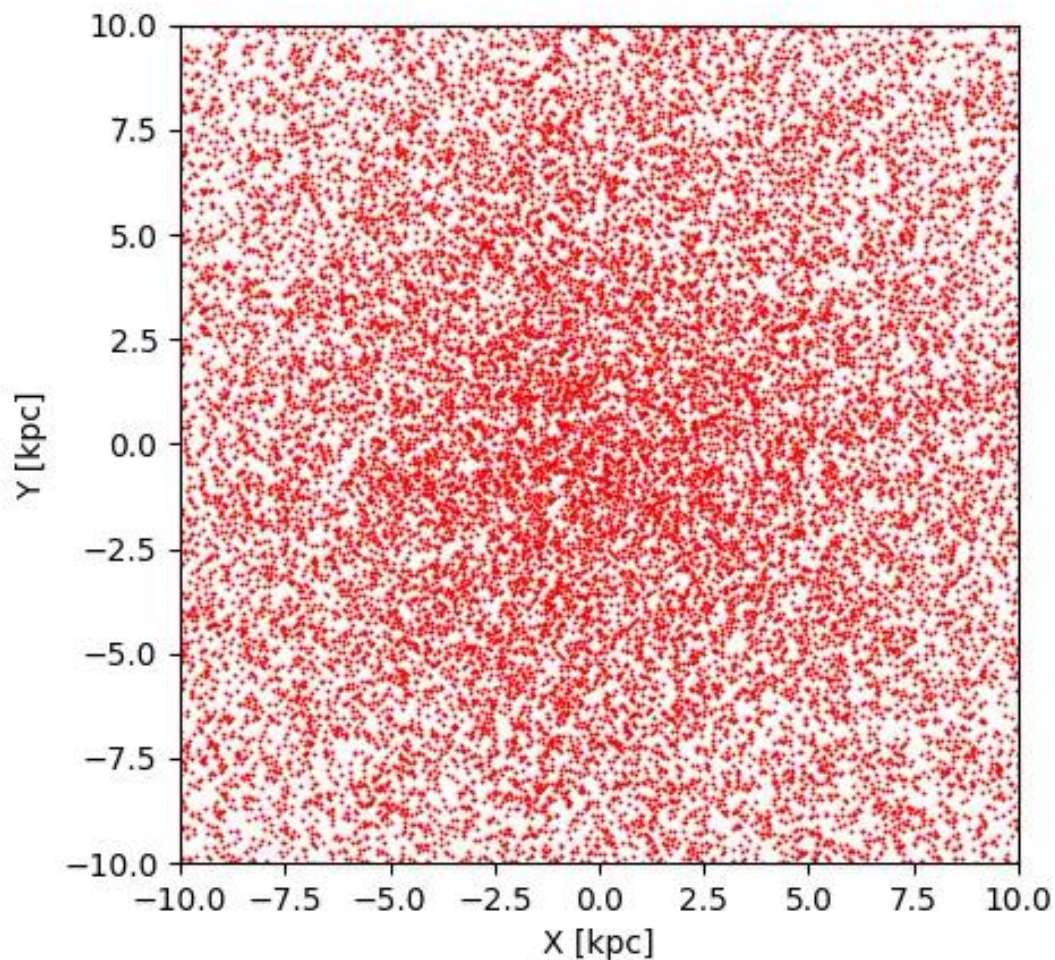
[Time]
  TEnd = 10.0             # Simulation end time.
  CFL = 0.3               # Coefficient for the CFL timestep.

[Hydro]
  UseDISPH = 1            # If 1, ASURA adopts DISPH. If 0, ASURA uses standard SPH.
  SelectKernelType = 3    # 0=cubic spline kernel,
```

Barred galaxy テストの可視化

- Barred galaxy tests (runs/galaxy)

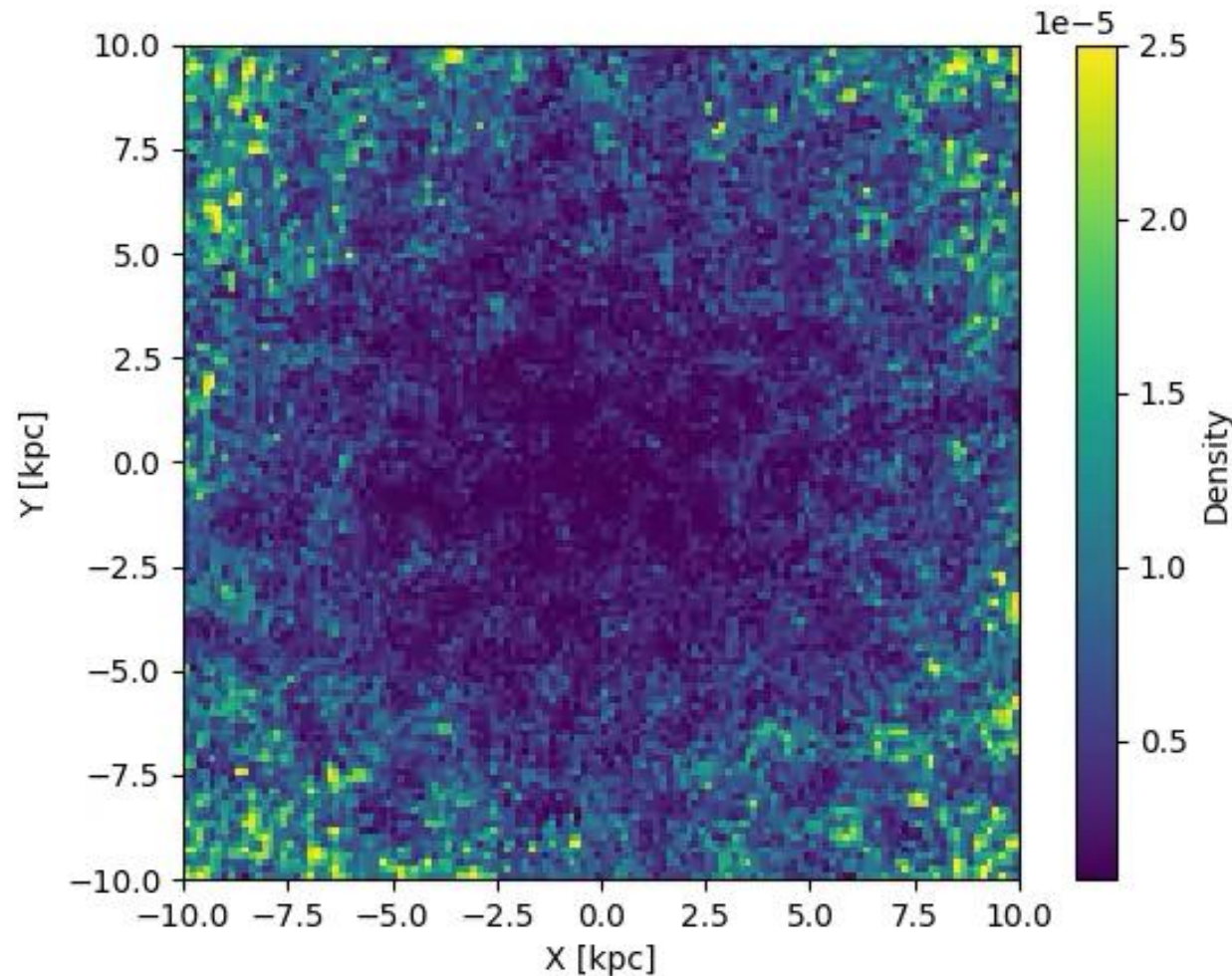
[Mode] PlotType=6
[Galaxy] Plottype=0,2



Barred galaxy テストの可視化

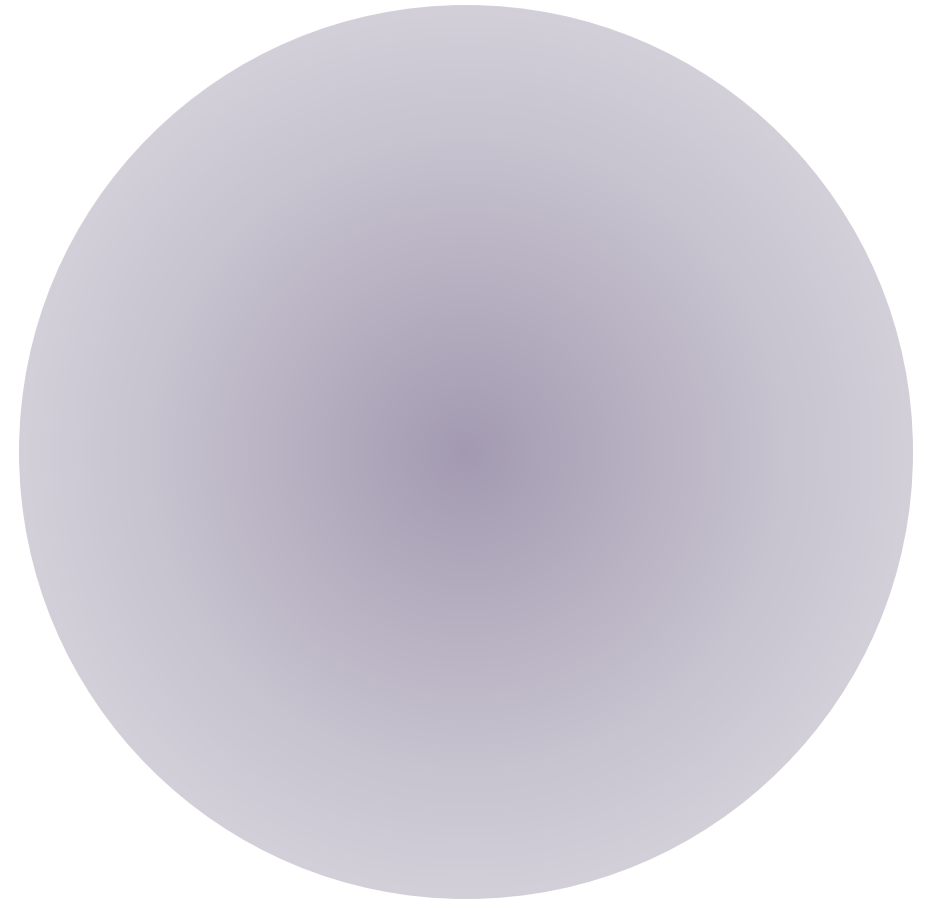
- Barred galaxy tests (runs/galaxy)

[Mode] PlotType=6
[Galaxy] Plottype=1



Evrard テスト

- 断熱ガス球の三次元重力収縮問題
 - 自己重力流体の標準的なテスト (Evrard 1988)
- 初期条件:
 - 密度分布 $\rho \propto 1/r$
 - 半径 $R = 1$ 、質量 $M = 1$ 、速度 $v = 0$ 、重力定数 $G = 1$ 、内部エネルギー $u = 0.05$ 、比熱比 $\gamma = 5/3$
- 重力計算にはツリー法を使用



Evrard テスト

- ツリー法に関するパラメータ (src/evrard/param.toml)

[Gravity]

```
SolveSelfGravity = 1      # If 1, self-gravity is solved.
UseSymmetrizedPlummer = 1 # If 1, the symmetrized Plummer model is adopted.
OpeningAngle = 0.5        # The opening angle for the gravity.
GroupSize = 32            # The group size which shares the same interaction list
for the gravity calculation.
GravitationalConstant = 1.0 # The gravitational constant.
```


- UseSymmetrizedPlummer はとりあえず今は気にしない (Saitoh&Makino 2012)
- OpeningAngle が見込み角
- GroupSize は相互作用リストを共有する粒子グループのサイズに対応

Evrard テストの実行

- 作業ディレクトリ: `./runs/evrard`
- 次の二つのケースを試してみましょう:
 - UseDISPH 1, and OutDir `./data_disph`
 - UseDISPH 0, and OutDir `./data_ssph`

[IO]

```
OutDir = "./data_disph" # data output directory.  
ICFile = "" # Initial condition file.  
RunName = "Evrard" # Base name of output file.  
OutputFileNumber = 100 # Number of output files.  
WriteEveryStep = 0 # When this flag is 1, the program writes particle data after every step.
```



[Boundary]


```
Dimension = 3 # Dimension.  
PeriodicBoundary = 0 # Periodic boundary condition.  
LBox0 = 1 # Box size.  
LBox1 = 1 # Box size.  
LBox2 = 1 # Not used in this run.
```

[Time]

```
TEnd = 3.0 # Simulation end time.  
CFL = 0.3 # Coefficient for the CFL timestep.
```

[Hydro]

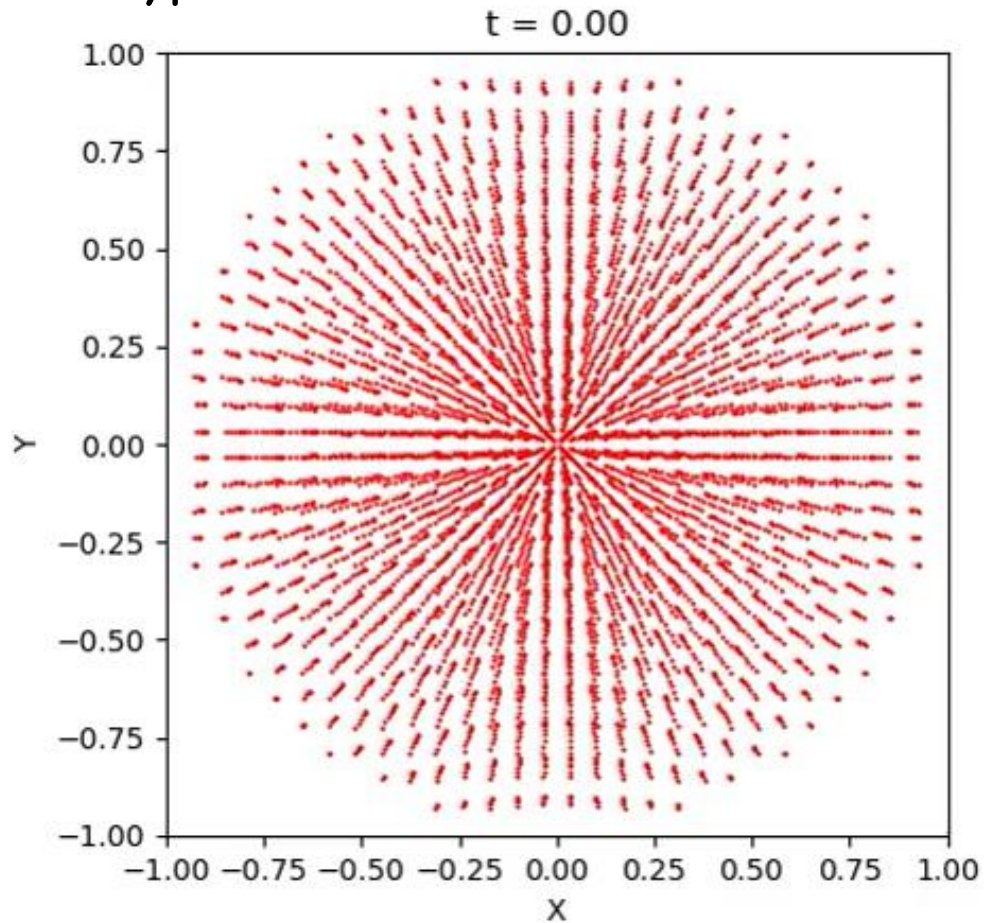
```
UseDISPH = 1 # If 1, ASURA adopts DISPH. If 0, ASURA uses standard SPH.  
SelectKernelType = 3 # 0=cubic spline kernel,
```



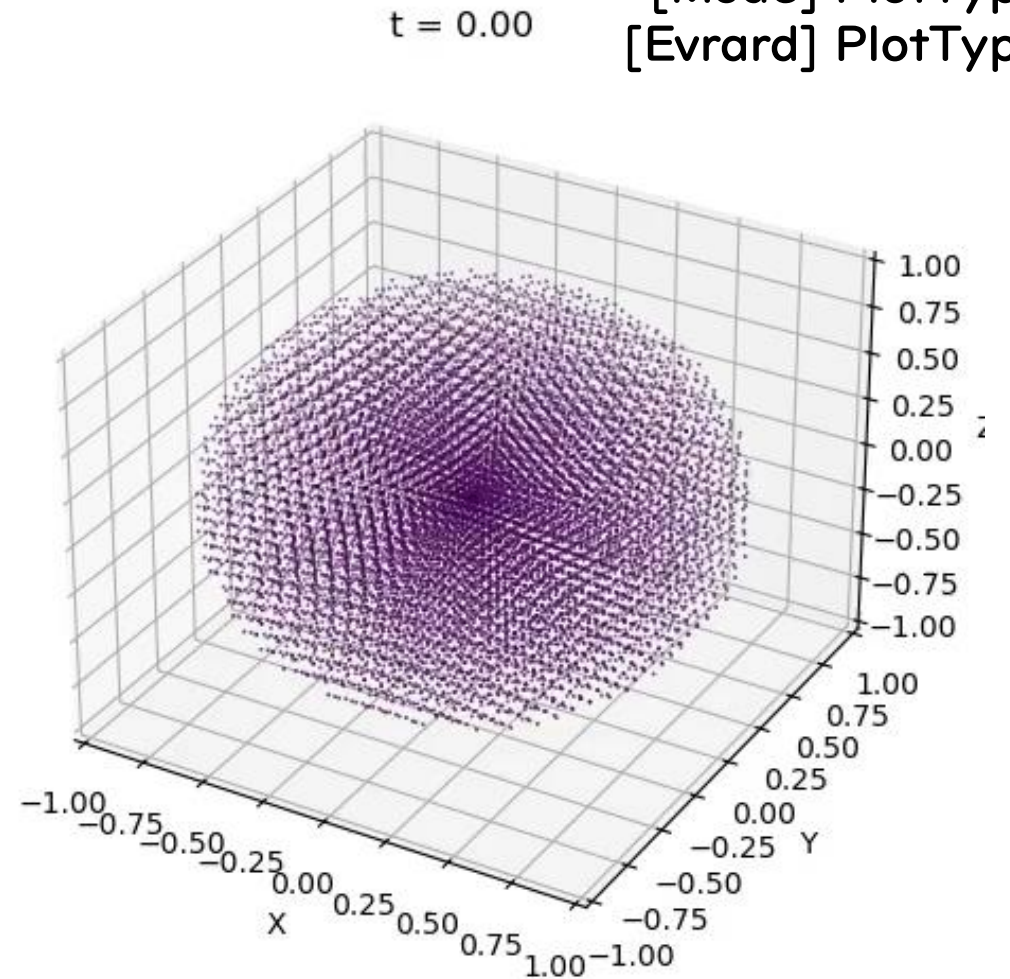
Evrard テストの可視化

- Evrard tests (runs/evrard)

[Mode] PlotType=7
[Evrard] PlotType=0



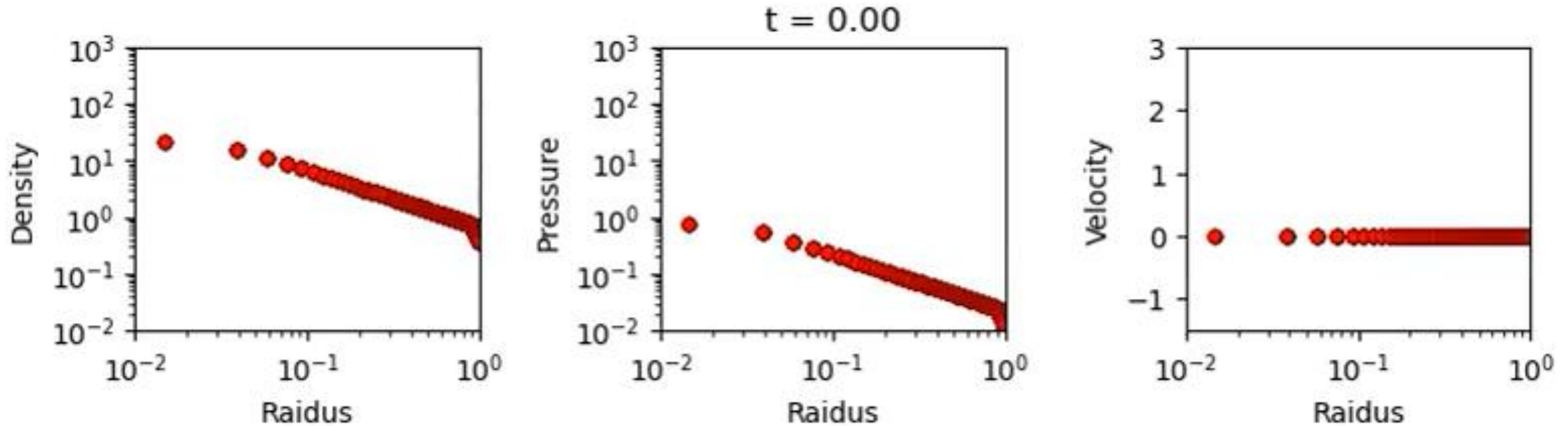
[Mode] PlotType=7
[Evrard] PlotType=9



Evrard テストの可視化

- Evrard tests (runs/evrard)

[Mode] PlotType=7
[Evrard] PlotType=4



余裕がある人向け課題

- 粒子数を変更してみる(st/kh/rt/galaxy/evrard)
 - NParticles
- Kernel のタイプを変更してみる(hq/kh)
 - KernelType
- 長時間積分する(kh)
 - TEnd
- エネルギーや運動量の保存を確認してみる
 - コード編集が必要
- バーポテンシャルのパターン速度を変更してみる
 - コード編集が必要(src/setup/SetupGalaxyModel.c: 101 行目)
 - 例えば50km/s/kpc → 10km/s/kpc
- 渦状腕ポテンシャルを導入してみる(galaxy)
 - コード編集が必要(src/setup/SetupGalaxyModel.c: 153行目以下に何か)

シミュレーションパラメータ変更について

- シミュレーション実行ディレクトリにある param.toml の中に定義されているパラメータを変更します
- 例: hydrostatic equilibrium テスト

[Mode]

```
RunType = 1          # 1 is
NParticles = 48      # Npar
```

粒子数を変更する場合、Nparticles = 48 を変更する例えば64とか、96とか。この数字の二乗が粒子数になるので、大きくしすぎると計算に時間がかかります

[Hydro]

```
Gamma = 1.6667      # Specific
Ns      = 32         # Number o
Nspm    = 2          # Toleranc
```

相互作用する(コンボリューションとる)粒子の数大きくすると時間がかかります、小さくすると速くなるけど計算がおかしくなりがち

[Hydro]

```
UseDISPH = 1          # If 1,
SelectKernelType = 3  # 0=cubic
```

SelectKernelType =3 を 3 以外にすると、カーネルが変わります。

例えば、SelectKernelType = 0 かつ Ns = 64 とかするとヘンテコな振る舞いが見えるはずです (Pairing instability と呼ばれるものです)

参考文献

PART 3

Contents

1. 理論パート

– SPH の原理

- Standard SPH
- Density independent SPH

– その他

- 人工粘性、時間積分、時間刻み幅
- ツリー法による自己重力計算

2. 実習パート

– 実習で使うコードについての短いお話

– 実行について (CfCAマニュアル)

– テスト

- 1D shocktube
- 2D hydrostatic equilibrium test
- 2D Kelvin-Helmholtz instability test
- 2D Rayleigh-Taylor instability test
- 3D Sedov-Taylor test
- 2D Keplerian disk test
- 2D barred galaxy test

3. 参考文献

Original papers

- Lucy, AJ, vol. 82, p. 1013–1024, 1977
- Monaghan & Gingold, MNRAS, vol. 181, p. 375–389, 1977

Reviews

- Monaghan, ARAA. Vol. 30 p. 543–574, 1992
- Monaghan, RPPH, Vol. 68, p. 1703–1759, 2005
- Rosswog, New A. Reviews, Vol. 53, p. 78–104, 2009
- Springel, ARAA, vol. 48, p.391–430, 2010

Other Important Papers

- Hernquist & Katz, ApJ Supplement Series, vol. 70, p. 419–446, 1989
- Ritchie & Thomas, MNRAS, Vol. 323 p. 743–756, 2001
- Springel & Hernquist, MNRAS, Vol. 333 p. 649–664, 2002
- Inutsuka, JCoPh, Vol. 179, p. 238–267, 2002
- Okamoto et al., MNRAS, Vol.345, p. 429–446, 2003
- Price, JCoPh, Vol. 227, p. 10040–10057
- Read et al., MNRAS, Vol. 405 p. 1513–1530, 2010
- Cullen & Dehnen, MNRAS, Vol. p. 669–683, 2010
- Dehnen & Aly, MNRAS, Vol. 425, p. 1068–1082, 2012
- Garcia-Senz et al, A&A, Vol. 538, AA9, 2012
- Saitoh & Makino, ApJ, Vol. 768, article id. 44, 2013

Other Important Papers

- Hopkins, MNRAS, Vol. 428, p.2840–2856, 2013
- Hosono, Saitoh & Makino, PASJ, Vol.65, article id.108, 2013
- Hosono, Saitoh & Makino, ApJS, Vol.224, article id. 32, 2016
- Saitoh & Makino, ApJ, Vol.823, article id. 144, 2016
- Yamamoto & Makino, PASJ, Vol. 69, id 35, 2017
- Price et al. PASP, Vol.35, id.e031, 82pp., 2018

Misc.

- Balsara, JCoPh, Vol. 121, p.357–372, 1995
- Monaghan, JCoPh, Volume 136, p. 298–307, 1997
- Saitoh & Makino, ApJ Letters, Vol. 697, p. L99–L102, 2009
- Saitoh & Makino, PASJ, Vol.62, p.301–314, 2010

日本語で書かれているもの

- シリーズ現代の天文学14シミュレーション天文学
- シリーズ<宇宙物理学の基礎> Series 5 輻射電磁流体シミュレーションの基礎

