宇宙流体力学

圧縮性流体力学の基礎について

斎藤貴之

2025 年 3 月 24 日

神戸大学

Abstract

ここでは、宇宙流体、特に圧縮性流体を扱うための方程式の基礎を紹介する。

目次

宇宙の流体

流体方程式

圧縮性流体

衝撃波

参考書

宇宙の流体

連続体/流体近似

物体は微視的に見ると原子・分子の集まり、一方巨視的には物理量 $\rho, p, T, V, \ldots$ で記述される。

物体を連続体として扱うことを連続体近似という。固体・液体・気体のうち特に液体・気体は変形に対して応力が小さく、流れるという運動を生じる。このような物体の動きを流体という。

宇宙流体

気体分子の平均自由行程は、n を個数密度、σ を衝突断面積とすると

$$l \sim \left(\frac{1}{n\sigma}\right) \tag{1}$$

分子の半径をボーア半径とすると

$$l \sim \left(\frac{1}{10^6\ \mathrm{m}^{-3}\pi(10^{-10}\ \mathrm{m})^2}\right) \sim 3 \times 10^{13}\ \mathrm{m} \sim 10^{-5}\ \mathrm{pc} \tag{2}$$

一方、宇宙で扱うスケール L は、パーセクスケール以上なので

$$L \gg l \tag{3}$$

であり、連続体近似が成り立つ流体と見なせる

流れの方程式

流れを表現する方程式は

- 運動を表す速度 $\boldsymbol{v}$: 3 成分
- 熱力学的量: 状態方程式があるので 2 つ $(P, \rho, u, \ldots)$

の 5 つの未知数がある。この 5 つの未知数に対応する方程式が

- 質量保存
- 運動量保存
- エネルギー保存

から導かれる。これらに加え状態方程式を用いることで方程式系が閉じる。

流体方程式

Euler 的表現と Lagrange 的表現

流れの表現には二つの流儀がある

- Euler 的表現 : 空間の各点ごとに流体の速度を求める
- Lagrange 的表現: 流体を構成する素片に注目し、その運動を追跡する

Euler 微分と Lagrange 微分

- Euler 微分: 空間のある点に固定した時間変化

$$\frac{\partial}{\partial t} \tag{4}$$

- Lagrange 微分: 流れに沿った時間変化

$$\frac{D}{Dt} \tag{5}$$

Euler 微分と Lagrange 微分の関係 (1)

次のような物理量 F の変化を考える。

物理量 F の流れに沿った時間変化

$$\frac{DF}{Dt} = \lim_{\varDelta t \to 0} \frac{F(\boldsymbol{r} + \boldsymbol{v}\varDelta t, t + \varDelta t) - F(\boldsymbol{r}, t)}{\varDelta t} \tag{6}$$

Euler 微分と Lagrange 微分の関係 (2)

ここで、$F(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{v}\varDelta t, t+\varDelta t)$ について、テイラー展開をすると

$$F(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{v}\varDelta t, t+\varDelta t) = F(\boldsymbol{r}, t+\varDelta t) + \frac{\partial F}{\partial x}v_x\varDelta t + \frac{\partial F}{\partial y}v_y\varDelta t + \frac{\partial F}{\partial z}v_z\varDelta t \tag{7}$$

$$= F(\boldsymbol{r}, t+\varDelta t) + \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}F\varDelta t \tag{8}$$

なので、これを使うと

Euler 微分と Lagrange 微分の関係

$$\frac{DF}{Dt} = \lim_{\varDelta t\to 0}\frac{F(\boldsymbol{r}, t+\varDelta t) + \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}F\varDelta t - F(\boldsymbol{r}, t)}{\varDelta t} \tag{9}$$

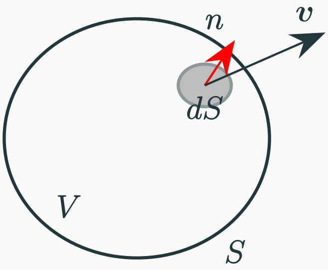
$$= \frac{\partial F}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}F \tag{10}$$

質量保存 (1)

空間中の体積 V の領域の微小面積 dS からの流出量
$\rho\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}dS$ が質量の減少に相当するので

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho dV = -\oint_S \rho\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}dS \tag{11}$$

$$= -\int_V \boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho\boldsymbol{v})dV \tag{12}$$



よって

$$\boxed{\frac{\partial\rho}{\partial t}+\boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho\boldsymbol{v})=0} \tag{13}$$

が質量保存則

質量保存 (2)

ラグランジュ微分を使うと[1]

$$\boxed{\frac{D\rho}{Dt} + \rho\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v} = 0} \tag{15}$$

なお、非圧縮では

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v} = 0 \tag{16}$$

より

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v} = 0 \tag{17}$$

1

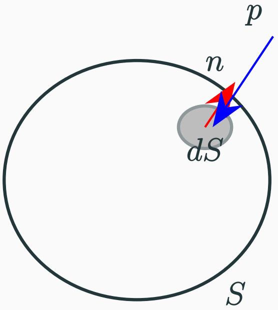
$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla} \tag{14}$$

運動量保存 (1)

粘性を無視した完全流体を考える。流体と共に運動する閉曲面 S に圧力 p が面に対して垂直にかかっている。この力が加速度をもたらすので

$$\int_V \rho \frac{Dv}{Dt} dV = -\oint_S pn dS \tag{18}$$

$$= -\int_V \nabla p dV \tag{19}$$



よって

$$\boxed{\rho \frac{Dv}{Dt} = -\nabla p} \tag{20}$$

運動量保存 (2)

オイラー微分を使うと

$$\boxed{\rho\left\{\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}+(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{v}\right\}=-\boldsymbol{\nabla}p+\rho\boldsymbol{g}} \tag{21}$$

なお、最後の $\rho\boldsymbol{g}$ は重力の項

運動方程式と $\boldsymbol{v}$ との内積を取る

$$\boldsymbol{v} \cdot \rho \frac{D\boldsymbol{v}}{Dt} = \boldsymbol{v} \cdot (-\boldsymbol{\nabla} p + \rho \boldsymbol{g}) \tag{22}$$

$$左辺 = \boldsymbol{v} \cdot \rho \frac{D\boldsymbol{v}}{Dt} = \rho \frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{2}v^2\right) \tag{23}$$

また

$$-\frac{1}{\rho}\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nabla} p = -\frac{1}{\rho}\left(\frac{Dp}{Dt} - \frac{\partial p}{\partial t}\right) \tag{24}$$

エネルギー保存 (2)

熱力学的関係

$$dh = \frac{dp}{\rho} + Tds \tag{25}$$

から

$$\frac{1}{\rho}\frac{Dp}{Dt} = \frac{Dh}{Dt} - T\frac{Ds}{Dt} = \frac{Dh}{Dt}(\text{断熱なので}) \tag{26}$$

以上より、

$$\frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{2}v^2 + h\right) = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{g} \tag{27}$$

もう少し整理する

エネルギー保存 (3)

先の式の両辺に ρ をかけて、オイラー微分にすると

$$\rho\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}v^2+h\right)+\rho\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}\left(\frac{1}{2}v^2+h\right)=\frac{\partial p}{\partial t}+\rho\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{g} \tag{28}$$

また、連続の式に $v^2/2+h$ をかけたもの

$$\left(\frac{1}{2}v^2+h\right)\frac{\partial\rho}{\partial t}+\left(\frac{1}{2}v^2+h\right)\boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho\boldsymbol{v})=0 \tag{29}$$

を足し合わせて整理すると

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\rho\left(\frac{1}{2}v^2+h\right)\right\}+\boldsymbol{\nabla}\cdot\left\{\rho\boldsymbol{v}\left(\frac{1}{2}v^2+h\right)\right\}=\frac{\partial p}{\partial t}+\rho\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{g} \tag{30}$$

エネルギー保存 (4)

$h = u + p/\rho$ から

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(\rho h - \rho u) \tag{31}$$

となるので

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\left\{\rho\left(\frac{1}{2}v^2 + u\right)\right\} + \boldsymbol{\nabla}\cdot\left\{\rho\boldsymbol{v}\left(\frac{1}{2}v^2 + h\right)\right\} = \rho\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{g} + \Gamma - \Lambda} \tag{32}$$

- $\rho v^2/2$: 運動エネルギー
- ρu : 内部エネルギー
- h が入るのは p がする仕事が入るから

なお、Γ と Λ は放射加熱、冷却の項

エネルギー保存 (5)

Lagrange 形式のエネルギー保存則は熱力学の第一法則から

$$dU = TdS - pdV \tag{33}$$

より

$$\frac{DU}{Dt} = -p\frac{DV}{Dt} = -p\frac{D}{Dt}\left(\frac{m}{\rho}\right) = \frac{pm}{\rho^2}\frac{D\rho}{Dt} \tag{34}$$

$$= -m\frac{p}{\rho}(\nabla \cdot v)(\text{連続の式を使って}) \tag{35}$$

最後に $U = mu$ とすると

$$\boxed{\frac{Du}{Dt} = -\frac{p}{\rho}(\nabla \cdot v) + \frac{\Gamma}{\rho} - \frac{\Lambda}{\rho}} \tag{36}$$

状態方程式 $(p = (\gamma - 1)\rho u)$ で方程式系が閉じる

圧縮性流体

摂動方程式と波動方程式 (1)

圧縮性流体では密度の変動が音波として伝播する。0 次及び 1 次の変動量を 0,1 を付けて表すと

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1 \tag{37}$$

$$p = p_0 + p_1 \tag{38}$$

$$\rho = \rho_0 + \rho_1 \tag{39}$$

連続の式に代入すると

$$\frac{\partial(\rho_0 + \rho_1)}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho_0 + \rho_1)\boldsymbol{v}_1 = 0 \tag{40}$$

1 次の項は

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot \rho_0 \boldsymbol{v}_1 = 0 \tag{41}$$

摂動方程式と波動方程式 (2)

運動方程式に代入すると

$$(\rho_0 + \rho_1)\left\{\frac{\partial \boldsymbol{v}_1}{\partial t} + (\boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{v}_1\right\} = -\boldsymbol{\nabla}(p_0 + p_1) \tag{42}$$

1 次の項は

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}_1}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0}\boldsymbol{\nabla} p_1 \tag{43}$$

$$= -\frac{a^2}{\rho_0}\boldsymbol{\nabla}\rho_1 \tag{44}$$

ここで断熱では p は ρ だけの関数なので

$$\boldsymbol{\nabla} p = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s \boldsymbol{\nabla}\rho = a^2 \boldsymbol{\nabla}\rho \tag{45}$$

摂動方程式と波動方程式 (3)

$$\frac{\partial^2 \rho_1}{\partial t^2} = -\boldsymbol{\nabla} \cdot \rho_0 \frac{\partial \boldsymbol{v}_1}{\partial t} \tag{46}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{v}_1}{\partial t} = -\frac{a^2}{\rho_0} \nabla^2 \rho_1 \tag{47}$$

から

$$\boxed{\frac{\partial^2 \rho_1}{\partial t^2}} = -\rho_0 \left(\boldsymbol{\nabla} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{v}_1}{\partial t} \right) = -\rho_0 \frac{a^2}{\rho_0} \nabla^2 \rho_1 \tag{48}$$

$$\boxed{= a^2 \nabla^2 \rho_1} \tag{49}$$

これは波動方程式。また $\boldsymbol{v}_1$ についても以下の通り

$$\boxed{\frac{\partial^2 \boldsymbol{v}_1}{\partial t^2} = a^2 \nabla^2 \boldsymbol{v}_1} \tag{50}$$

特性曲線と保存量 (1)

変動が微小でない場合を考えるために有効な特性曲線の方法について説明する。ここでは断熱 1 次元の状況を考える。運動方程式と連続の式は以下

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{a^2}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial x} \tag{51}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \tag{52}$$

状態方程式として $p = K\rho^{\gamma}$ を考えると

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{2}{\gamma - 1}\frac{da}{a} \tag{53}$$

特性曲線と保存量 (2)

これを用いて ρ を a に置き換えると

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x} + a\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2a}{\gamma - 1}\right) = 0 \tag{54}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{2a}{\gamma - 1}\right) + v\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2a}{\gamma - 1}\right) + a\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \tag{55}$$

これらの式の和と差をとると

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(v + \frac{2a}{\gamma - 1}\right) + (v + a)\frac{\partial}{\partial x}\left(v + \frac{2a}{\gamma - 1}\right) = 0 \tag{56}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(v - \frac{2a}{\gamma - 1}\right) + (v - a)\frac{\partial}{\partial x}\left(v - \frac{2a}{\gamma - 1}\right) = 0 \tag{57}$$

特性曲線と保存量 (3)

ここで

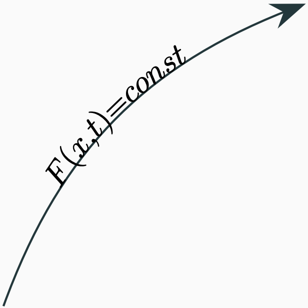
$$J_{\pm} = v \pm \frac{2a}{\gamma - 1} \tag{58}$$

を導入すると

$$\frac{\partial J_{\pm}}{\partial t} + (v \pm a)\frac{\partial J_{\pm}}{\partial x} = 0 \tag{59}$$

となる。この式の意味を考えてみる。

特性曲線と保存量 (4)



もし F が曲線 C に沿って一定だったとすると、全微分は

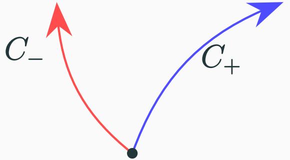
$$dF = \frac{\partial F}{\partial t}dt + \frac{\partial F}{\partial x}dx \tag{60}$$

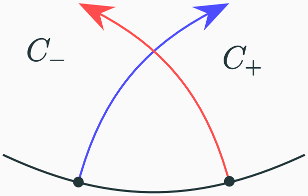
$$= \frac{\partial F}{\partial t}dt + \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\frac{\partial F}{\partial x}dt = 0 \tag{61}$$

従って

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\frac{\partial F}{\partial x} = 0 \tag{62}$$

特性曲線と保存量 (5)





- $J_\pm$ は曲線 $C_\pm$ に沿って一定
- 勾配 $dx/dt = v \pm a$
- $C_\pm$ は特性曲線
- $J_\pm$ はリーマン不変量

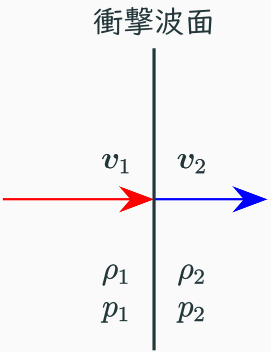
左上の図はある点から変動が到達する範囲を示している。一方、左下の図は交点の物理量の決定には囲まれた領域からの寄与があるということを表している。

衝撃波

衝撃波

流体中の情報伝播はリーマン不変量を保存する特性曲線で表される。一般に異なる特性曲線は異なる速度 (物理量) を持つ。後ろからより速い特性曲線が来て交わると、物理量が多価になる。現実の流体では、粘性より不連続に物理量が変化する。これを衝撃波と呼ぶ。物理量が不連続に変化する面を衝撃波面と呼ぶ。

衝撃波と Rankin-Hugoniot の関係 (1)



衝撃波の波面の前後で物理量が不連続に変化する。衝撃波面とともに移動する座標系をとると、物質は定常的に前方から波面に速度 v_1 で流れ込み、v_2 で波面後方に流れていく。
波面前後で物理量は保存するので基礎方程式は

$$\nabla \cdot \rho v = 0 \tag{63}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_k}(p\delta_{ij} + \rho v_i v_k) = 0 \tag{64}$$

$$\nabla \cdot \left\{ \rho v \left(\frac{1}{2} v^2 + h \right) \right\} = 0 \tag{65}$$

衝撃波と Rankin-Hugoniot の関係 (2)

波面の前後では

$$\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2 \tag{66}$$

$$p_1 + \rho_1 v_1^2 = p_2 + \rho_2 v_2^2 \tag{67}$$

$$\frac{1}{2} v_1^2 + h_1 = \frac{1}{2} v_2^2 + h_2 \tag{68}$$

以下理想気体の場合を考えるが、そうすると最後の式は次のようになる

$$\frac{1}{2} v_1^2 + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_1}{\rho_1} = \frac{1}{2} v_2^2 + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_2}{\rho_2} \tag{69}$$

衝撃波と Rankin-Hugoniot の関係 (3)

$$x = \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{v_1}{v_2}, y = \frac{p_2}{p_1}, a_1^2 = \frac{\gamma p_1}{\rho_1}, \mathcal{M}_1 = \frac{v_1}{a_1} \tag{70}$$

を使って運動方程式、エネルギー方程式を書き換えると

$$\mathcal{M}_1^2\left(1 - \frac{1}{x}\right) = \frac{y-1}{\gamma} \tag{71}$$

$$\mathcal{M}_1^2\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) = \frac{2(yx^{-1} - 1)}{\gamma - 1} \tag{72}$$

衝撃波と Rankin-Hugoniot の関係 (4)

$$x = \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{(\gamma+1)\mathcal{M}_1^2}{(\gamma-1)\mathcal{M}_1^2+2} \tag{73}$$

$$y = \frac{p_2}{p_1} = \frac{2\gamma\mathcal{M}_1^2-(\gamma-1)}{(\gamma+1)} \tag{74}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{p_2\rho_1}{p_1\rho_2} = \frac{[2\gamma\mathcal{M}_1^2-(\gamma-1)][(\gamma-1)\mathcal{M}_1^2+2]}{(\gamma+1)^2\mathcal{M}_1^2} \tag{75}$$

また、波面後ろのマッハ数 $\mathcal{M}_2$ は

$$\mathcal{M}_2^2 = \left(\frac{v_2}{a_2}\right)^2 = \mathcal{M}_1^2\left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2\left(\frac{T_1}{T_2}\right) = \frac{(\gamma-1)\mathcal{M}_1^2+2}{2\gamma\mathcal{M}_1^2-(\gamma-1)} \tag{76}$$

この式から、$\mathcal{M}_1^2 > 1$ ならば、$\mathcal{M}_2^2 < 1$ (図示してみよ)

衝撃波と Rankin-Hugoniot の関係 (5)

$\mathcal{M}_1^2 \gg 1$ の場合を考える。式 (73)、(74)、(75) から、この時 p_2/p_1 と T_2/T_1 はいくらでも大きくなるが、$\rho_2/\rho_1 = (\gamma+1)/(\gamma-1)$ になる。$\gamma = 5/3$ の時 $\rho_2/\rho_1 = 4$。

衝撃波と Rankin-Hugoniot の関係 (6)

理想気体のエントロピー $s = c_v \log(p/\rho^\gamma)$ から衝撃波前後でのエントロピーの変化は

$$s_2 - s_1 = c_v \log \left\{ \frac{(p_2/p_1)}{(\rho_2/\rho_1)^\gamma} \right\} \tag{77}$$

弱い衝撃波について $\mathcal{M}_1^2 = 1 + m_1, m_1 \ll 1$ を考えると式 (73)、(74) から

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = 1 - \frac{2}{(\gamma+1)} \frac{m_1}{(+m_1)} \tag{78}$$

$$\frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1} m_1 \tag{79}$$

$$\Delta s = s_2 - s_1 \sim c_v \frac{2\gamma(\gamma-1)}{3\gamma(\gamma+1)^2} m_1^3 > 0(\text{熱力学の第二法則から}) \tag{80}$$

従って $m_1 > 0$ 、$\mathcal{M}_1 > 1$ なので超音速流かつ圧縮性衝撃波

参考書

参考書

- 数値流体の基礎 (岡本崇)
  https://www.cfca.nao.ac.jp/files/hydro_okamoto_1.pdf
- 宇宙流体力学 (坂下志郎・池内了著/培風館)
- 宇宙流体力学の基礎 (福江純・和田桂一・梅村雅之著/日本評論社)